

NNT : 2015SACLS225

UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574)

Établissement d'inscription : Université Paris-Sud

Laboratoire d'accueil : Laboratoire de mathématiques d'Orsay, UMR 8628 CNRS

THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES

Spécialité : Mathématiques fondamentales

Thomas MORZADEC

Compactification géométrique de l'espace de modules
des structures de demi-translation sur une surface.

Date de soutenance : 11 Décembre 2015

Après avis des rapporteurs : PASCAL HUBERT Université de Aix-Marseille
ERWAN LANNEAU Institut Fourier à Grenoble

Jury de soutenance :

CORNÉLIA DRUTU	Université d'Oxford	Examinatrice
PASCAL HUBERT	Université de Aix-Marseille	Rapporteur
ERWAN LANNEAU	Institut Fourier à Grenoble	Rapporteur
PIERRE PANSU	Université Paris-Sud	Président du jury
FRÉDÉRIC PAULIN	Université Paris-Sud	Directeur de thèse
ANTON ZORICH	Université Paris Diderot	Examineur

Remerciements

Alors que je m'apprête à soutenir ma thèse, je me sens particulièrement reconnaissant envers mon directeur Monsieur Paulin. Je ne vous remercierai jamais assez de m'avoir donné la chance d'entreprendre ma thèse sous votre direction. Ces trois années passées à travailler sur des problématiques très riches et passionnantes, m'ont beaucoup apporté. J'ai pu bénéficier de vos connaissances et de votre expérience. Je vous remercie particulièrement de votre disponibilité et du soin que vous avez apporté à la correction de mon travail. Je remercie également Francis Bonahon et Laurence Carl Siebenmann sans qui vous n'auriez pas été mon directeur, ainsi que Thomas Haettel qui m'a encouragé à entreprendre ce travail sous votre direction.

Je souhaite ensuite exprimer toute ma reconnaissance envers Erwan Lanneau et Pascal Hubert d'avoir accepté de rapporter ma thèse, et je remercie Cornélia Drutu, Pierre Pansu et Anton Zorich qui me font l'honneur d'être membres de mon jury.

J'ai eu la chance de travailler dans un cadre et une ambiance privilégiés à l'Université d'Orsay et je tiens à remercier tous ceux qui y contribuent, en particulier Valérie Lavigne et Fabienne Jacquemin, grâce à qui les soucis administratifs ne sont pas trop pesants, ainsi que les organisateurs du groupe de travail "Géométrie des groupes", Frédéric Haglund puis Romain Tessera, et du séminaire "Géométrie, Topologie et Dynamique", Rémi Leclercq, Jean Lécureux, Damien Thomine et Anne Vaugon, qui m'ont beaucoup apporté. Je remercie surtout tous les doctorants qui ont vécu ces années avec moi, en particulier l'équipe des "nageurs de choc", Corentin, Élodie, Émilien et Mélina, mes collègues de bureau Alba, Daphné, Élodie, Étienne, Guokuan, Imène, Joseph, Raphaël, Robert, et Vincent. Je ne peux ici nommer tous les doctorants, mais je garde de bons souvenirs des moments partagés avec Arthur, Émilie, Cagri, Céline, Lionel, Lison, Lucie, Lucile, Olivier, Pierre-Antoine, Valérie, Vincent, et ceux qui me pardonneront d'avoir oublié de les nommer.

Je me sens également redevable à ceux qui m'ont permis d'aller jusqu'au doctorat, à celles et ceux qui m'ont initié aux Mathématiques, en particulier Mademoiselle Wolff et mes professeurs de prépa, Erwan Biland et Henri Lemberg, et à ceux qui m'ont encadré par la suite, en particulier Jean Lannes, Julien Marché et Christophe Margerin. Je tiens également à remercier François Couture qui m'a appris à avoir une grande exigence dans mon travail.

Pendant mes trois années de thèse, j'ai eu la chance d'être invité à exposer mes travaux dans des séminaires, et ainsi d'avoir pu bénéficier d'une interaction toujours enrichissante. Je tiens à remercier tous ceux qui m'y ont invité : Louis Funar, Frédéric Haglund, Pascal Hubert, Erwann Lanneau, Ludovic Marquis, Athanase Papadopoulos, ainsi que le GDR Platon. Je remercie également Yves Benoist et Anne Parreau d'avoir manifesté leur intérêt pour mon travail, ainsi que tous les organisateurs, l'école doctorale et l'équipe "géométrie, topologie et dynamique", de m'avoir permis de participer à de nombreuses conférences. Je remercie également l'École polytechnique et l'Université d'Orsay qui m'ont offert les meilleures conditions d'étude qu'on pouvait espérer.

Ces trois années n'ont pas été consacrées qu'aux Mathématiques. Un grand merci à tous mes proches qui les ont illuminées, à mes colocos Geoffroy et Nassim, et en particulier à Andrés, qui a été à la fois un ami, un colocataire et ma gouvernante ! Enfin, je remercie ma famille sans le soutien de laquelle je n'aurais pas pu m'investir à ce point dans mes études.

Table des matières

1	Introduction.	5
1.1	Dégénérescences des structures de demi-translation vers les structures mixtes.	9
1.2	Liens avec les compactifications de l'espace de Teichmüller.	14
1.3	Laminations plates mesurées.	16
2	Rappels sur les surfaces munies d'une structure de demi-translation.	19
2.1	Espaces localement $CAT(0)$	19
2.2	Structures de demi-translation.	19
2.3	Différentielles quadratiques holomorphes et structures plates dirigées.	20
2.4	Action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur l'espace de modules de différentielles quadratiques holomorphes.	22
3	Geometric compactification of moduli spaces of half-translation structures on surfaces.	24
3.1	Isometric action of the covering group on the universal cover of a surface endowed with a half-translation structure.	24
3.2	Subsurface with geodesic boundary or filled up by simple closed curves	29
3.2.1	Subsurface filled up by a set of (free) homotopy classes of simple closed curves or by a measured hyperbolic lamination.	29
3.2.2	Subsurfaces with flat geodesic boundary.	33
3.3	Ultralimits of sequences of metric spaces.	36
3.4	Ultralimits of sequences of half-translation structures.	37
3.4.1	Typical degenerations.	38
3.4.2	Decomposition of Σ into pieces.	44
3.4.3	The subsurface Σ_0	44
3.4.4	Complementary connected components of Σ_0 in Σ	46
3.4.5	Case of degeneration.	48
3.4.6	Case of non degeneration.	50
3.4.7	Complementary components of Σ_0 which are cylinders or pair of pants.	55
3.5	Mixed structures.	56
3.6	Surfaces with boundary.	69
4	Laminations géodésiques plates.	70
4.0.1	Espaces localement $CAT(0)$	70
4.0.2	Ordres cycliques.	71
4.0.3	Laminations géodésiques.	71

4.1	Comportement des géodésiques locales d'une structure de demi-translation.	73
4.1.1	Comportement de deux géodésiques locales d'une structure de demi-translation.	73
4.2	Image au bord à l'infini d'une famille de géodésiques.	77
4.2.1	Rappels sur les laminations géodésiques hyperboliques.	77
4.2.2	Liens entre géodésiques locales hyperboliques et plates.	79
4.2.3	Laminations plates minimales.	80
4.2.4	Rayons asymptotiques.	85
4.3	Lamination plate minimale de support un graphe fini.	87
4.4	Théorème de structure des laminations géodésiques plates.	90
5	Laminations géodésiques plates mesurées.	92
5.1	Définition des laminations géodésiques plates mesurées.	92
5.2	Relevé d'une lamination plate mesurée.	94
5.3	Laminations plates mesurées et mesures de Radon sur l'espace des géodésiques plates du revêtement universel.	95
5.4	Liens entre laminations plates mesurées et laminations hyperboliques mesurées.	96
5.4.1	Nombre d'intersection.	99
5.5	Arbre dual à une lamination plate mesurée.	101
5.6	Action du groupe de revêtement sur l'arbre dual à une lamination plate mesurée.	103
5.7	Liens entre l'arbre dual à une lamination plate mesurée et l'arbre dual à la lamination hyperbolique mesurée correspondante.	106

Chapitre 1

Introduction.

Le but de ce mémoire est de décrire de manière géométrique les dégénérescences de structures de demi-translation sur les surfaces. Il s'inscrit dans le très large thème d'étude des déformations de structures géométriques sur les surfaces, et de manière générale, sur les variétés topologiques. Un des premiers exemples d'espace de structures géométriques sur une variété topologique est l'espace modulaire des (classes d'isométries de) tores plats, qui s'identifie à l'ensemble des réseaux de \mathbb{R}^2 modulo rotation et qui, muni de sa topologie naturelle, et après renormalisation pour être d'aire 1, est homéomorphe au quotient du demi-plan de Poincaré \mathbb{H}^2 par l'action par homographies de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ (i.e. les applications de la forme $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$). Un autre exemple, qui peut être considéré comme le réel début de l'étude des espaces de structures géométriques sur une variété topologique, est l'espace des classes d'isomorphisme de structures complexes sur une surface Σ compacte, connexe, sans bord, de genre au moins 2, qui d'après le théorème d'uniformisation, s'identifie à l'espace des classes d'isométrie de métriques hyperboliques (i.e. riemanniennes de courbure constante égale à -1) sur la surface. Son étude par Poincaré se ramène à celle de l'action des groupes fuchsien (i.e. les sous-groupes discrets de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$) sur le demi-plan de Poincaré, et elle s'étend à celle des sous-groupes discrets des groupes d'isométrie des espaces symétriques.

On peut chercher à déterminer s'il existe une ou plusieurs structures d'un type donné sur une variété topologique, et dans le second cas, à paramétrer leur ensemble et à le munir d'une topologie. Par exemple, il existe une et une seule métrique hyperbolique (à isométrie près) sur une variété compacte, de dimension au moins trois (théorème de rigidité de Mostow). En revanche, l'espace des classes d'isotopie de métriques hyperboliques sur une surface connexe, orientable, compacte, sans bord, de genre g , appelé l'espace de *Teichmüller* de Σ , muni de la topologie naturelle, est homéomorphe à \mathbb{R}^{6g-6} . D'autres espaces de modules de structures géométriques sont aujourd'hui activement étudiés : espace des surfaces de demi-translation (qui est l'objet de ce manuscrit, et sur lequel travaillent notamment Calta, Eskin, Hubert, Laneeau, Masur, McMullen, Möller, Mirzakhani, Schmidt, Smillie, Veech, Weiss, Yoccoz, Zorich, ...), des structures projectives, en particulier sur les surfaces, réelles (Benoist, Choi, Goldman, Marquis, ...) ou complexes (Dumas, Gallo, Kapovich, Marden, ...), et l'espace des structures affines (Labourie, Goldman, Guéritaud, Kassel, Margulis, ...).

Une classe particulière de structures géométriques sur les variétés topologiques sont les (G, X) -structures sur une variété topologique Σ , avec G un groupe de Lie et X un espace homogène G/H sous G , avec H un sous-groupe fermé de G : il s'agit d'un système maximal de coordonnées sur Σ à valeur dans X tel que les changements de cartes sont localement des restrictions d'éléments de G

(voir par exemple [Gol]). La question est de classer les différentes manières de calquer localement la géométrie de X dans la topologie de Σ . L'étude des (G, X) -structures vient d'une proposition de Klein dans son programme d'Erlangen (1872), qui relie les géométries "classiques" et les variétés munies d'une action transitive d'un groupe de Lie. Par exemple, les surfaces de translation régulières sont des surfaces, localement modelées sur \mathbb{C} , dont les changements de cartes sont localement de la forme $z \mapsto z + c$, avec $c \in \mathbb{C}$, et les surfaces de demi-translation régulières sont telles que les changements de cartes sont de la forme $z \mapsto \pm z + c$, avec $c \in \mathbb{C}$.

Lorsqu'on étudie un ensemble de structures géométriques sur un espace topologique, on peut chercher à le paramétrer, et à le munir d'une topologie. Par exemple, comme conjecturé par Thurston suite aux travaux d'Ahlfors-Bers dans le cas géométriquement fini, et démontré dans les travaux de Minsky, Agol, Brock, Canary..., l'espace des classes d'isotopie de métriques hyperboliques sur l'intérieur d'une variété compacte, orientable, à bord non vide, de dimension 3, est paramétré par des invariants de bouts qui sont ou bien des structures complexes sur des composantes connexes de son bord, ou bien des laminations hyperboliques (sur lesquelles nous reviendrons plus tard) sur ces composantes (voir par exemple [Lec]). Pour les surfaces, un outil classique pour la compréhension des classes de structures géométriques est le spectre des longueurs des courbes fermées. Soient \mathcal{C} l'ensemble des classes d'homotopies de courbes fermées sur une surface Σ et ρ une classe d'isotopie de distance sur Σ . Pour tout $\alpha \in \mathcal{C}$, on note $\ell_\rho(\alpha) = \inf_{c \in \alpha} \ell_\rho(c)$ la borne inférieure de l'ensemble des longueurs des courbes fermées dans la classe α . Si F est un sous-ensemble de \mathcal{C} , le spectre de ρ sur F est l'ensemble $(\ell_\rho(\alpha))_{\alpha \in F}$. Si \mathcal{G} est un ensemble de classes d'isotopie de distances sur Σ , on peut se demander s'il existe un sous-ensemble F de \mathcal{C} dont les longueurs pour les éléments de \mathcal{G} paramètrent \mathcal{G} , c'est-à-dire tel que l'application $\mathcal{G} \rightarrow (\mathbb{R}^+)^F$ définie par $\rho \mapsto (\ell_\rho(\alpha))_{\alpha \in F}$ est injective. On dit alors que F est *spectralement rigide* pour \mathcal{G} . Par exemple, Fricke a montré qu'il existe des sous-ensembles finis de l'ensemble \mathcal{S} des classes d'homotopie de courbes fermées simples de Σ , avec $6g - 6$ éléments (où g est le genre de Σ , supposée connexe, orientable, compacte, sans bord), qui sont spectralement rigides sur l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(\Sigma)$ des classes d'isotopie de métriques hyperboliques sur Σ , ce qui permet de montrer que $\mathcal{T}(\Sigma)$, muni de sa topologie naturelle, est homéomorphe à \mathbb{R}^{6g-6} .

L'ensemble \mathcal{S} est spectralement rigide sur l'ensemble $\text{Flat}(\Sigma)$ des classes d'isotopie de structures de demi-translation sur Σ (voir ci-dessous pour une définition). En revanche, aucun sous-ensemble fini de \mathcal{S} n'est spectralement rigide sur $\text{Flat}(\Sigma)$. Ces résultats de rigidité ont été prolongés dans plusieurs directions. Par exemple, l'ensemble \mathcal{C} est spectralement rigide sur plusieurs ensembles de classes d'isotopie de métriques localement CAT(0) (voir [Ota], [CFF] et [Cro]).

Lorsqu'un espace de structures géométriques sur une variété topologique n'est pas compact, on peut s'intéresser aux comportements asymptotiques de suites de structures qui sortent de tous compacts. Peu de résultats sont connus pour la plupart des espaces de structures géométriques, hormis pour l'espace de Teichmüller, dont plusieurs compactifications ont été proposées, en particulier par Thurston (voir [FLP], et aussi Bestvina, Morgan, Paulin, Shalen), pour l'espace des structures projectives sur une surface, complexes (voir par exemple [Dum]) ou réelles (voir par exemple Cooper, Parreau, Loftin, ...), et pour l'espace $\text{Flat}(\Sigma)$ des structures de demi-translation sur une surface (voir ci-dessous pour une définition), dont une compactification a été proposée dans [DLR] et qui est l'objet de ce manuscrit.

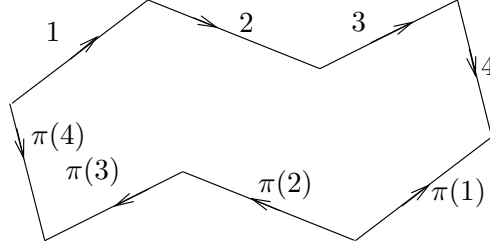
L'espace des structures géométriques étudié dans ce manuscrit est l'espace $\text{Flat}(\Sigma)$ des classes d'isotopies de structures de demi-translation sur une surface Σ compacte, connexe, orientable. Avant

de le définir précisément, faisons quelques commentaires. Si Σ est un tore, il s'identifie à l'espace des métriques plates (c'est-à-dire des métriques riemanniennes à courbure nulle), qui, après renormalisations pour être d'aire 1, est homéomorphe au quotient $\mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ comme vu ci-dessus. Mais d'après la formule de Gauss-Bonnet, si la caractéristique d'Euler de Σ est strictement négative, il n'existe pas de métrique plate sur Σ . Les métriques localement euclidiennes à singularités sur les surfaces de genre au moins 2 sont donc une généralisation naturelle des métriques euclidiennes sur le tore. On peut également les interpréter comme des métriques hyperboliques aplaties, dont la courbure a été concentrée en des points, qui sont des Diracs de courbure négative. Les surfaces de demi-translation sont apparues d'abord à partir des différentielles quadratiques holomorphes, pour étudier la structure complexe de l'espace de Teichmüller (voir par exemple [HM, DH]). Elles sont également centrales dans l'étude dynamique et ergodique du flot géodésique de Teichmüller sur l'espace modulaire de Teichmüller, par exemple dans les travaux majeurs de Masur, Veech, Eskin, Mirzakhani (lui ayant valu une médaille Fields) et Mohammadi (voir par exemple [ABEM, Mas1, Vee1, Vee2]). C'est un outil pratique à utiliser, car la simplicité de leur géométrie permet de se ramener à des arguments de géométrie euclidienne.

Soit Σ une surface connexe, orientable, sans bord pour simplifier dans l'introduction. Une *structure de demi-translation* (ou *structure plate à holonomie* $\{\pm \mathrm{Id}\}$) sur Σ est la donnée d'une partie discrète Z de Σ (éventuellement vide) et d'une métrique euclidienne (c'est-à-dire de courbure constante nulle) sur $\Sigma - Z$ à singularités coniques d'angles $k\pi$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 3$ aux points de Z , telle que l'holonomie de tout lacet fermé, \mathcal{C}^1 par morceaux, de $\Sigma - Z$ soit contenue dans $\{\pm \mathrm{Id}\}$. La surface Σ munie d'une structure de demi-translation est un espace métrique localement CAT(0). Nous renvoyons à [Wri, Zor] pour des introductions aux structures de demi-translation.

Une *différentielle quadratique holomorphe* q sur Σ est la donnée d'une structure complexe sur Σ et, pour toute carte locale (U, z) , d'une fonction holomorphe $q_{(U,z)}$ sur U , telle que si (U, z) et (U', z') sont deux cartes locales, alors $q_{(U,z)}dz^2 = q_{(U',z')}dz'^2$ sur $U \cap U'$. Une différentielle quadratique holomorphe non nulle q sur Σ définit une structure de demi-translation et un champ de droites parallèle sur Σ , en dehors des singularités, qui définit une direction privilégiée. On dit alors que (Σ, q) est une *surface de demi-translation*, car l'ensemble Z des zéros de q est discret dans Σ , et q définit un atlas maximal sur $\Sigma - Z$ tel que les changements de carte sont de la forme $z \mapsto \pm z + c$, avec $c \in \mathbb{C}$. Nous renvoyons par exemple à [Abi, Str, Gar] pour une introduction aux différentielles quadratiques holomorphes. On note $\mathcal{Q}(\Sigma)$ l'ensemble des classes d'isotopies de différentielles quadratiques holomorphes sur Σ . Le groupe $\mathrm{SO}(2)$ agit sur $\mathcal{Q}(\Sigma)$ par rotation du champ de droites parallèle (voir la partie 2.3). L'ensemble $\mathrm{Flat}(\Sigma)$ des classes d'isotopie de structures de demi-translation sur Σ s'identifie avec le quotient de $\mathcal{Q}(\Sigma) - \{0\}$ par l'action par rotation de $\mathrm{SO}(2)$, et on notera $[q]$, avec $q \in \mathcal{Q}(\Sigma)$, une structure de demi-translation. L'espace $\mathcal{Q}(\Sigma)$ est central pour l'étude de l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(\Sigma)$, car il s'identifie canoniquement à son espace cotangent, et permet notamment d'étudier l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{T}(\Sigma)$, en particulier le flot géodésique de Teichmüller (i.e. l'action de $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}_{t \in \mathbb{R}^*}$).

Les surfaces de demi-translation sont souvent décrites comme des recollements de polygones. Si P est un polygone, ou une union de polygones, dont les côtés peuvent être appariés par côtés opposés de même longueur et parallèles, alors on obtient une surface de demi-translation en recollant les côtés d'une même paire, soit en préservant l'orientation, soit en renversant l'orientation (chaque côté doit être recollé à un et un seul côté, de façon à obtenir une surface fermée).



Les surfaces de demi-translation apparaissent sous cet angle notamment dans l'étude des billards polygonaux dont les angles aux sommets sont des multiples rationnels de π , par exemple dans les travaux de Fox et Kershner [FK]. On considère un billard polygonal et une boule qui se déplace et rebondit sur les bords comme un rayon lumineux qui se déplace dans le vide et se réfléchit sur des miroirs. On ne considère que les trajectoires qui ne rencontrent pas les coins du billard. On peut déplier le polygone, et obtenir ainsi une surface de demi-translation. L'étude des trajectoires dans le billard se ramène alors à l'étude du flot géodésique dans la surface de demi-translation (voir par exemple le survol [Zor, §. 2.1]).

Le groupe des rotations de \mathbb{R}^2 agit sur l'ensemble des polygones (ou unions de polygones) dont les côtés peuvent être ainsi appariés. Une structure de demi-translation peut être définie comme l'orbite d'un tel recollement de polygones pour cette action. Les différentielles quadratiques holomorphes et les recollements de polygones sont deux manières différentes de définir les structures de demi-translation sur les surfaces. L'un ou l'autre des points de vue peut être utilisé selon le problème abordé. Par exemple, l'action du groupe linéaire $GL_2^+(\mathbb{R})$ sur l'espace des surfaces de demi-translation, définies par recollements de polygones, est définie par l'action de $GL_2^+(\mathbb{R})$ sur les côtés des polygones, ce qui permet de la comprendre géométriquement. En revanche, cette approche des surfaces de demi-translation est moins adaptée pour étudier la structure complexe sous-jacente. Dans ce manuscrit, on s'intéresse principalement aux métriques, donc on considérera les structures de demi-translation comme des classes d'équivalence de différentielles quadratiques holomorphes.

Ce mémoire a deux contributions principales. La première contribution est une compactification géométrique de l'espace $\mathbb{P}\text{Flat}(\Sigma)$ des classes d'homothéties de structures de demi-translation sur une surface compacte, pour la topologie quotient de la topologie de Gromov équivariante, introduite dans [Pau3]. Si X est un espace topologique localement compact, une *compactification* de X est un espace topologique compact Y tel que X se plonge sur un ouvert dense de Y (on identifie X et son image dans Y). Deux compactifications Y et Y' sont *équivalentes* si l'application identité de X se prolonge continuellement en un homéomorphisme de Y dans Y' .

Nous définissons l'espace $\text{Mix}(\Sigma)$ des classes d'isométries équivariantes de structures mixtes sur Σ , qui sont des structures arborescentes au sens de Drutu-Sapir, dont les pièces sont soit des surfaces munies d'une structure de demi-translation, soit des arbres réels, soit des arêtes de longueurs finies (éventuellement nulle), dans lequel se plonge naturellement $\text{Flat}(\Sigma)$, et nous montrons que le projectifié $\mathbb{P}\text{Flat}(\Sigma)$ est un ouvert dense du projectifié $\mathbb{P}\text{Mix}(\Sigma)$, qui est compact.

Nous montrons aussi que l'application $[q] \mapsto (\ell_{[q]}(\alpha))_{\alpha \in \mathcal{S}}$ se prolonge continuellement à l'espace $\text{Mix}(\Sigma)$, ce qui permet de montrer que notre compactification est duale à celle de [DLR].

La deuxième contribution de cette thèse est l'introduction et l'étude des laminations plates mesurées (voir la partie 1.3 pour une présentation plus détaillée), qui sont une généralisation des laminations géodésiques mesurées sur les surfaces hyperboliques (voir par exemple [Bon2]), qui permettent, par exemple, de comprendre le comportement des systoles de la suite de structure de

demi-translation, dans les sous-surfaces de Σ sur lesquelles la suite de structures de demi-translation dégénère. Les chapitres 3, 4, 5 sont en cours de soumission (voir [Mor2, Mor3, Mor4, Mor1]).

1.1 Dégénérescences des structures de demi-translation vers les structures mixtes.

Supposons que Σ est compacte et $\chi(\Sigma) < 0$. Soit $p : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ un revêtement universel de groupe de revêtement Γ . On commence par définir les structures mixtes sur Σ , qui sont des structures arborescentes, au sens de Drutu-Sapir, $\text{CAT}(0)$, et qui apparaissent, comme nous le verrons, comme des dégénérescences de suites de structures de demi-translation sur $\tilde{\Sigma}$.

Rappelons qu'une *structure arborescente* (voir [DS, Def. 1.10]) est la donnée d'un espace métrique géodésique complet X et d'un recouvrement \mathcal{P} par des sous-ensembles fermés et géodésiques de X , dont les éléments sont appelés *pièces*, telle que :

- deux pièces distinctes ont au plus un point en commun ;
- les triangles géodésiques simples de X sont contenus dans une seule pièce.

Soit Σ_0 une sous-surface compacte, propre (éventuellement vide) de Σ , à bord lisse, telle qu'aucune composante connexe de Σ_0 n'est un disque ou un pantalon, aucune composante connexe de $\Sigma - \Sigma_0$ n'est un disque, et aucune composante cylindrique de Σ_0 ne peut être homotopée dans une autre composante connexe de Σ_0 . On dit alors que Σ_0 est une sous-surface *tendue*. Soit W l'intérieur d'une sous-surface compacte, connexe de Σ , soit \tilde{W} une composante connexe de la préimage de W dans $\tilde{\Sigma}$, et $\Gamma_{\tilde{W}}$ le stabilisateur de \tilde{W} dans Γ .

Nous aurons besoin des définitions suivantes. Si $\chi(W) < 0$, une *lamination hyperbolique mesurée* sur W (munie d'une métrique hyperbolique complète quelleconque) est un sous-ensemble Λ fermé non vide de W , réunion de géodésiques simples et deux à deux disjointes, munie d'une famille μ de mesures transverses (voir par exemple [Bon2] pour la définition). On dit que (Λ, μ) est *remplissante* si les composantes connexes de $W - \Lambda$ sont des disques idéaux ou des disques idéaux privés d'un point. La lamination hyperbolique mesurée définit un arbre réel, appelé *arbre dual* à (Λ, μ) muni d'une action de $\Gamma_{\tilde{W}}$ (voir la partie 3.4.1). Nous verrons que puisque Λ est remplissante, les éléments elliptiques non triviaux de $\Gamma_{\tilde{W}}$ sont les éléments non triviaux des stabilisateurs des composantes de bord de (l'adhérence de) \tilde{W} , qu'ils ont un unique point fixe dans l'arbre dual à (Λ, μ) , et que les autres éléments de $\Gamma_{\tilde{W}}$ n'ont pas de point fixe.

Si $[q_W]$ est une structure de demi-translation sur W , on suppose que $[q_W]$ peut être prolongée en une structure de demi-translation sur la surface compacte obtenue en remplissant les points enlevés de W , avec éventuellement des singularités d'angle π . Soit $[\tilde{q}_{\tilde{W}}]$ le relevé de $[q_W]$ sur \tilde{W} . Alors le complété de $(\tilde{W}, [\tilde{q}_{\tilde{W}}])$ est la réunion de \tilde{W} et d'un nombre dénombrable de points isolés, qui sont les points fixes des éléments non triviaux des stabilisateurs des composantes de bord de (l'adhérence de) \tilde{W} dans $\Gamma_{\tilde{W}}$.

Supposons que W soit une composante connexe de Σ_0 ou de $\Sigma - \Sigma_0$. On associe à \tilde{W} un espace métrique géodésique complet $X_{\tilde{W}}$ tel que :

- si \tilde{W} est une bande, alors $X_{\tilde{W}}$ est vide ;
- si \tilde{W} est une composante connexe de $\tilde{\Sigma}_0$ qui n'est pas une bande, alors $X_{\tilde{W}}$ est un point ;

- si \widetilde{W} est une composante connexe de $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Sigma}_0$ et W est un pantalon, alors $X_{\widetilde{W}}$ est un point ;
- si \widetilde{W} est une composante connexe de $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Sigma}_0$ et W n'est pas un pantalon,
 - ou bien $X_{\widetilde{W}}$ est le complété du relevé à \widetilde{W} d'une structure de demi-translation $[q_W]$ sur W comme ci-dessus.

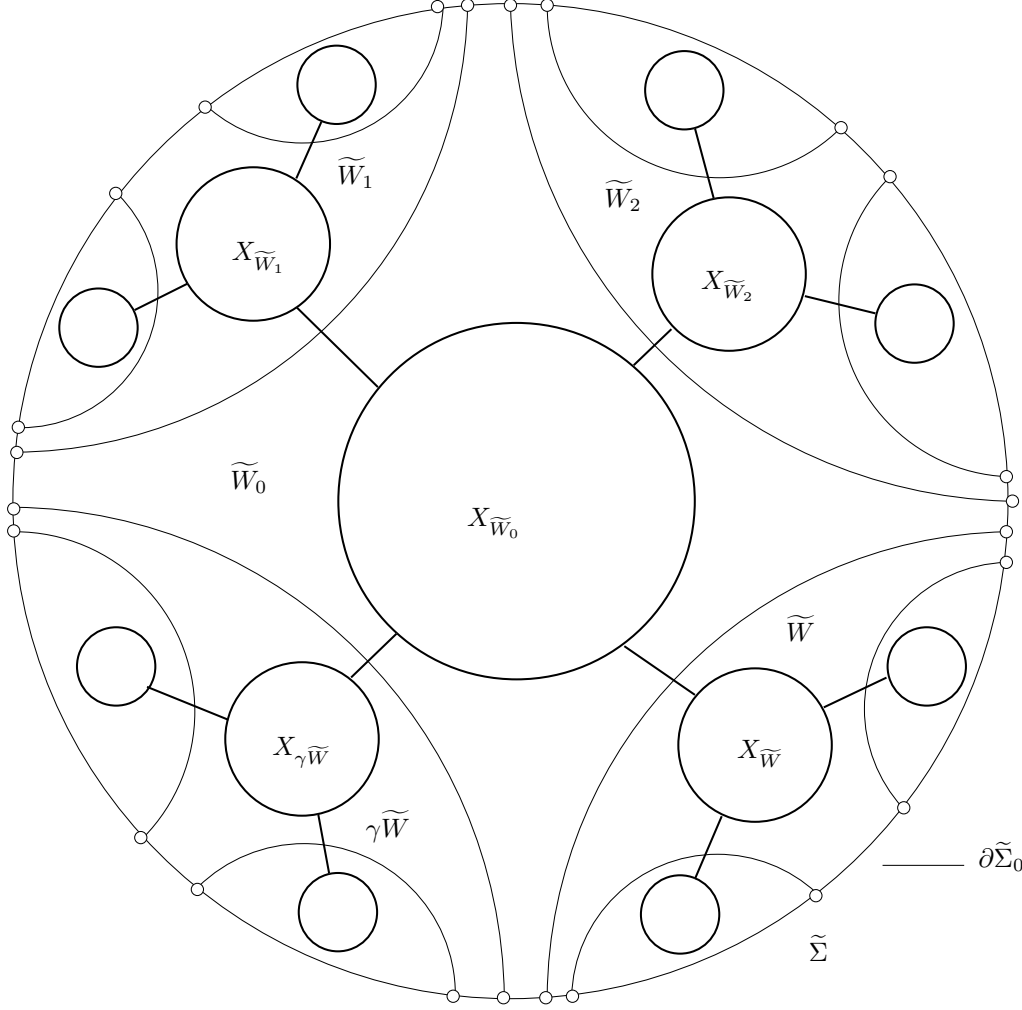
- ou bien $X_{\widetilde{W}}$ est l'arbre dual à une lamination hyperbolique mesurée remplissante sur W (munie d'une métrique hyperbolique complète quelconque).

À chaque classe d'homotopie propre \widetilde{c} de composante de bord de $\widetilde{\Sigma}_0$ (deux composantes de bord peuvent être proprement homotopes), on associe une arête (i.e. un interval borné de \mathbb{R}) $X_{\widetilde{c}}$ de longueur finie (éventuellement nulle).

Chacun des espaces métriques $X_{\widetilde{W}}$ tels que ci-dessus est muni d'une action isométrique du stabilisateur $\Gamma_{\widetilde{W}}$ de \widetilde{W} dans Γ , éventuellement triviale. On munit les espaces $X_{\widetilde{c}}$, où \widetilde{c} est une classe d'homotopie propre de composantes de bord de $\widetilde{\Sigma}_0$, de l'action triviale du stabilisateur $\Gamma_{\widetilde{c}}$ de \widetilde{c} dans Γ . Si \widetilde{c} borde les composantes connexes \widetilde{W} et \widetilde{W}' de $\widetilde{\Sigma}_0$ ou $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Sigma}_0$, on recolle les extrémités (non nécessairement confondues) de $X_{\widetilde{c}}$ respectivement aux uniques points fixes de $\Gamma_{\widetilde{c}}$ dans $X_{\widetilde{W}}$ et $X_{\widetilde{W}'}$ (qui existent et sont uniques, voir les lemmes 3.5.1 et 3.5.2). On munit l'espace topologique X ainsi obtenu de la distance de longueur induite par les distances sur les différents espaces métriques recollés.

Définition 1.1.1 *Une structure mixte sur Σ est un espace métrique X tel qu'il existe une sous-surface propre, tendue (éventuellement vide) Σ_0 , comme ci-dessus, tel que X est obtenu en recollant des espaces métriques complets $X_{\widetilde{W}}$ et $X_{\widetilde{c}}$, avec \widetilde{W} une composante connexe de $\widetilde{\Sigma}_0$ ou de $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Sigma}_0$, et \widetilde{c} une composante de bord de $\widetilde{\Sigma}_0$, comme ci-dessus, telle que :*

- si \widetilde{W} est une bande de $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Sigma}_0$, et si \widetilde{c} est la classe d'homotopie propre des composantes de bord de \widetilde{W} , alors $X_{\widetilde{c}}$ n'est pas réduite à un point ;
- si \widetilde{W} est une composante de $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Sigma}_0$ dont l'image dans Σ est un pantalon, il existe au moins une classe d'homotopie propre \widetilde{c} de composante de bord de \widetilde{W} telle que $X_{\widetilde{c}}$ n'est pas réduite à un point.



Nous verrons (voir la partie 3.5) qu'une structure mixte est une structure arborescente, CAT(0). De plus, l'action des sous-groupes $\Gamma_{\widetilde{W}}$ et $\Gamma_{\widetilde{c}}$ sur les pièces $X_{\widetilde{W}}$ et $X_{\widetilde{c}}$ telles que ci-dessus, se prolonge de manière unique en une action de Γ sur X en posant $\gamma(X_{\star}) = X_{\gamma(\star)}$, pour tout $\gamma \in \Gamma$. Nous verrons aussi que l'action de Γ sur X définit la sous-surface Σ_0 , à isotopie près. De plus, une structure mixte est définie (à isométrie équivariante pour l'action de Γ près) par les structures de demi-translation et par les laminations hyperboliques mesurées sur les composantes connexes de $\Sigma - \Sigma_0$, ainsi que par les longueurs des arêtes, qui déterminent ses pièces (voir la partie 3.5).

Soit $\text{Mix}(\Sigma)$ l'espace des classes d'isométrie équivariantes pour l'action de Γ de structures mixtes sur Σ . Soit $X \in \text{Mix}(\Sigma)$, soient K un sous-ensemble fini de X et P un sous-ensemble fini de Γ , et soit $\varepsilon > 0$. On définit le sous-ensemble $\mathcal{V}(X, K, P, \varepsilon)$ des éléments $X' \in \text{Mix}(\Sigma)$ tels qu'il existe un sous-ensemble fini $K' \subseteq X'$ et une relation $\mathcal{R} \subseteq K \times K'$, dont les projections sur K et K' sont surjectives, tels que

$$\begin{aligned} & \forall x, y \in K \quad \forall x', y' \in K' \quad \forall \gamma \in P \\ & \text{si } x\mathcal{R}x' \text{ et } y\mathcal{R}y', \text{ alors } |d(x', \gamma y') - d(x, \gamma y)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Les sous-ensembles $\mathcal{V}(X, K, P, \varepsilon)$ forment une base de voisinages de points d'une topologie sur $\text{Mix}(\Sigma)$, appelée la *topologie de Gromov équivariante* (voir [Pau3, Pau1]). On peut définir la topolo-

gie de Gromov équivariante sur n'importe quel ensemble d'espaces métriques munis d'une action isométrique de Γ . Généralement, cette topologie n'est pas séparée, mais nous verrons que $\text{Mix}(\Sigma)$, muni de cette topologie, est homéomorphe à un sous-ensemble fermé de $(\mathbb{R}^+)^{\Gamma}$.

Soit $\mathbb{P}\text{Mix}(\Sigma)$ l'espace des classes d'homothétie de $\text{Mix}(\Sigma)$, muni de la topologie quotient. Nous identifions l'espace $\text{Flat}(\Sigma)$ avec l'espace des classes d'isométrie équivariantes pour l'action de Γ de structures de demi-translation invariantes par Γ sur $\tilde{\Sigma}$, qui est un sous-ensemble de $\text{Mix}(\Sigma)$, et nous notons $\mathbb{P}\text{Flat}(\Sigma)$ son image dans $\mathbb{P}\text{Mix}(\Sigma)$. Les deux résultats principaux de ce mémoire sont les suivants :

Théorème 1.1.2 *L'espace $\mathbb{P}\text{Flat}(\Sigma)$ est un ouvert dense de $\mathbb{P}\text{Mix}(\Sigma)$, qui est compact. L'action du groupe modulaire de Σ sur $\mathbb{P}\text{Flat}(\Sigma)$ se prolonge continûment à $\mathbb{P}\text{Mix}(\Sigma)$.*

Soit $\mathbb{P}\mathbb{R}^{\Gamma} = ((\mathbb{R}^+)^{\Gamma} - \{0\})/\mathbb{R}^{+*}$. On note $[X]$ l'image de $X \in \text{Mix}(\Sigma)$ dans $\mathbb{P}\text{Mix}(\Sigma)$ et $[x_{\gamma}]_{\gamma \in \Gamma}$ l'image de $(x_{\gamma})_{\gamma \in \Gamma} \in ((\mathbb{R}^+)^{\Gamma} - \{0\})$ dans $\mathbb{P}\mathbb{R}^{\Gamma}$. Si X est un espace métrique muni d'une action par isométrie de Γ , pour tout $\gamma \in \Gamma$, nous notons $\ell_X(\gamma) = \inf\{d(x, \gamma x) : x \in X\}$ la distance de translation de γ dans X .

Théorème 1.1.3 *L'application $[X] \mapsto [\ell_X(\gamma)]_{\gamma \in \Gamma}$ est un plongement de $\mathbb{P}\text{Mix}(\Sigma)$ sur son image.*

Pour démontrer les deux théorèmes ci-dessus, nous utilisons des ultralimites de suites de revêtements universels de Σ munie de structures de demi-translation. L'ultralimite d'une suite d'espaces métriques est une notion introduite par M. Gromov (voir par exemple [Dru]). Elle utilise un ultrafiltre qui est une manière de choisir un point d'accumulation dans une suite, sans passer par des arguments d'extraction. Nous fixons un ultrafiltre non principal ω sur \mathbb{N} (voir [Bou, § 6.4]), et nous notons $\lim_{\omega} x_n$ la limite selon ω d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans un espace topologique X , qui vérifient les propriétés usuelles des limites. Elle existe et est unique si X est compact (comme $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, voir [Bou, §7]). Si Γ est un groupe et $(X_n, d_n, \star_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'espaces métriques pointés munis d'actions isométriques de Γ , soit

$$X_{\omega} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n : \lim_{\omega} d_n(x_n, \star_n) < +\infty\} / \sim$$

où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $\lim_{\omega} d_n(x_n, y_n) = 0$. On note $[x_n]_{n \in \mathbb{N}}$ l'image de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X_{ω} , et $\star_{\omega} = [\star_n]_{n \in \mathbb{N}}$, et on pose $d_{\omega}([x_n]_{n \in \mathbb{N}}, [y_n]_{n \in \mathbb{N}}) = \lim_{\omega} d_n(x_n, y_n)$. Alors l'espace métrique pointé $(X_{\omega}, d_{\omega}, \star_{\omega})$ est appelé l'*ultralimite de $(X_n, d_n, \star_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par rapport à ω* , noté $\lim_{\omega} (X_n, d_n, \star_n)$. L'action diagonale de Γ sur $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ est dite *admissible au point base* si $\lim_{\omega} d_n(\star_n, \gamma \star_n) < +\infty$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. L'application $\Gamma \times X_{\omega} \rightarrow X_{\omega}$ définie par $\gamma[x_n]_{n \in \mathbb{N}} = [\gamma x_n]_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une action par isométries sur X_{ω} . Si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de sous-ensembles de X_n , on note $[F_n]_{n \in \mathbb{N}} = \{[x_n]_{n \in \mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in F_n\}$.

Soient $([q_n])_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de structures de demi-translation sur Σ et $([\tilde{q}_n])_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des relevés sur $\tilde{\Sigma}$. Nous renormalisons les métriques $[\tilde{q}_n]$ de sorte que l'action de Γ sur $(\Sigma, [\tilde{q}_n])_{n \in \mathbb{N}}$ soit admissible et que l'action de Γ sur l'ultralimite $\lim_{\omega} (\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])_{n \in \mathbb{N}}$ n'ait pas de point fixe global. L'ultralimite $\lim_{\omega} (\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])_{n \in \mathbb{N}}$ est un espace géodésique, complet $\text{CAT}(0)$. De plus, nous verrons (Remarque 3.4.1) que pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a

$$\ell_{(\lim_{\omega} (\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])_{n \in \mathbb{N}})}(\gamma) = \lim_{\omega} \ell_{(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])}(\gamma).$$

Notons $\mathcal{S}_0 = \{\alpha \in \mathcal{S} : \lim_{\omega} \ell_{[q_n]}(\alpha) = 0\}$, et Σ_0 la sous-surface tendue (non connexe a priori) de Σ remplie par \mathcal{S}_0 (i.e. tous les éléments de \mathcal{S}_0 ont un représentant dans Σ_0 et pour tout $\alpha \in \mathcal{C}$ qui n'a pas de représentant disjoint de Σ_0 , il existe $\alpha_0 \in \mathcal{S}_0$ tel que $i(\alpha, \alpha_0) > 0$, Σ_0 est unique à isotopie près, voir la partie 3.2). Soit $\tilde{\Sigma}_0$ la préimage de Σ_0 dans $\tilde{\Sigma}$. Pour toute composante connexe \tilde{W} de $\tilde{\Sigma}_0$ ou de $\tilde{\Sigma} - \tilde{\Sigma}_0$, on note $\Gamma_{\tilde{W}}$ le stabilisateur de \tilde{W} dans Γ , et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note \tilde{W}_n la réalisation géométrique de l'adhérence de \tilde{W} , pour $[q_n]$, qui est une sous-surface généralisée (voir la partie 3.2), à bord géodésique, dans la classe d'homotopie propre de \tilde{W} , tel que chacune des classes d'homotopie propre de composante de bord de \tilde{W} n'a qu'un seul représentant géodésique dans \tilde{W}_n . Soient W l'image de \tilde{W} dans Σ et W_n l'image de \tilde{W}_n dans Σ .

Le critère géométrique qui caractérise la dégénérescence de la suite $(\tilde{W}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers un arbre réel (pour la topologie de Gromov équivariante) est

$$\lim_{\omega} \text{Aire}_{[q_n]}(W_n) = 0$$

où $\text{Aire}_{[q_n]}(W_n)$ est l'aire de W_n pour $[q_n]$ et

$$\lim_{\omega} \ell_{[q_n]}(b) = 0$$

pour toute composante de bord b de W (voir la partie 3.4.1). Le critère géométrique qui caractérise la non dégénérescence de la suite $(\tilde{W}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que pour tout élément non périphérique et non trivial de $\Gamma_{\tilde{W}}$ on a $\ell_{\tilde{W}_n}(\gamma) > \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (à extraction près). Nous montrerons qu'un et un seul de ces deux critères est satisfait.

Soient X un espace métrique muni d'une action de Γ et Γ' un sous-groupe de Γ . S'il existe un unique sous-ensemble minimal, non vide, convexe, invariant par Γ' , on dit que c'est le *coeur convexe* de Γ' . Nous verrons donc que l'action de $\Gamma_{\tilde{W}}$ sur $(\tilde{W}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie l'une des propriétés exclusives suivantes :

- si \tilde{W} est une composante connexe de $\tilde{\Sigma}_0$ qui n'est pas une bande, alors le coeur convexe de $\Gamma_{\tilde{W}}$ est un unique point ;
- si \tilde{W} est une composante connexe de $\tilde{\Sigma} - \tilde{\Sigma}_0$, et si W est un pantalon, alors le coeur convexe de $\Gamma_{\tilde{W}}$ est un unique point,
- si \tilde{W} est une composante connexe de $\tilde{\Sigma} - \tilde{\Sigma}_0$, et si W n'est ni un cylindre ni un pantalon, et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout élément non périphérique et non trivial $\gamma \in \Gamma_{\tilde{W}}$ et $n \in \mathbb{N}$ (quitte à extraire), on a $\ell_{\tilde{W}_n}(\gamma) \geq \varepsilon$, alors le coeur convexe de $\Gamma_{\tilde{W}}$ est le complété du relevé sur \tilde{W} d'une structure de demi-translation sur W ;
- si \tilde{W} est une composante connexe de $\tilde{\Sigma} - \tilde{\Sigma}_0$, et si W n'est ni un cylindre ni un pantalon, et si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $\gamma \in \Gamma_{\tilde{W}}$, non périphérique et non trivial, tel que $\lim_{\omega} \ell_{\tilde{W}_n}(\gamma) < \varepsilon$, alors le coeur convexe de $\Gamma_{\tilde{W}}$ est l'arbre dual à une lamination hyperbolique mesurée remplissante de W .

De plus, nous verrons que la réunion des coeurs convexes des sous-groupes $\Gamma_{\tilde{W}}$, avec \tilde{W} une composante connexe de $\tilde{\Sigma}_0$ ou de $\tilde{\Sigma} - \tilde{\Sigma}_0$ qui n'est pas une bande, et d'arêtes de longueurs finies (éventuellement nulles) qui les joignent, est une structure mixte, qui est un sous-ensemble Γ -invariant de $\lim_{\omega}(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])_{n \in \mathbb{N}}$. Par définition des ultralimites, l'ultralimite $\lim_{\omega}(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])_{n \in \mathbb{N}}$ est la limite d'une

sous-suite de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])_{n \in \mathbb{N}}$ pour la topologie de Gromov équivariante, ainsi que chacun de ses sous-ensembles non vides, Γ -invariants. Comme c'est une structure mixte, c'est la limite d'une sous-suite de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\text{Mix}(\Sigma)$.

Ceci montre que de toute suite de $\mathbb{P}\text{Flat}(\Sigma)$, on peut extraire une sous-suite convergente dans $\mathbb{P}\text{Mix}(\Sigma)$. De plus, nous verrons que toute structure mixte est la limite d'une suite dans $\text{Flat}(\Sigma)$, et l'espace $\text{Mix}(\Sigma)$ est métrisable, donc de toute suite de $\mathbb{P}\text{Mix}(\Sigma)$ on peut extraire une sous-suite convergente, donc $\mathbb{P}\text{Mix}(\Sigma)$ est compact.

Pour étudier la dégénérescence des suites de structures de demi-translations sur Σ , on utilise principalement le lemme suivant qui mesure l'hyperbolicité (au sens de Gromov) d'une sous-surface convexe. Soit \tilde{W} une sous-surface convexe de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ et $\text{Sing}(\tilde{W})$ l'ensemble des singularités de $[\tilde{q}]$ contenues dans \tilde{W} .

Lemme 1.1.4 (voir le lemme [Dan, Prop. 3.7].) *Soit $\varepsilon > 0$. Si la réunion $\text{Sing}(\tilde{W}) \cup \partial\tilde{W}$ est ε -dense dans \tilde{W} , alors \tilde{W} est 2ε -hyperbolique au sens de Gromov.*

Nous utiliserons également plusieurs lemmes qui caractérisent l'action de Γ sur $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$. Notamment, on peut minorer la distance d'un point à son image par un élément hyperbolique $\gamma \in \Gamma$, par la distance du point à l'axe de translation de γ dans $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ (voir les lemmes 3.1.6 et 3.1.7). Tous ces résultats reposent sur la formule de Gauss-Bonnet pour les surfaces munies de structures de demi-translation. Soit \tilde{W} une sous-surface fermée de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ à bord géodésique par morceaux. Si x appartient au bord de \tilde{W} , l'angle intérieur $\theta(x) > 0$ est l'angle entre les germes de rayons de $\partial\tilde{W}$ issus de x , mesuré dans \tilde{W} , et si x appartient à l'intérieur de \tilde{W} , l'angle $\theta(x)$ est l'angle total en x (i.e. $n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 3$ si x est une singularité, et 2π sinon).

Lemme 1.1.5 [Dan, Prop. 3.6] *On a*

$$2\pi\chi(\tilde{W}) = \sum_{x \in \overset{\circ}{\tilde{W}}} (2\pi - \theta(x)) + \sum_{x \in \partial\tilde{W}} (\pi - \theta(x))$$

1.2 Liens avec les compactifications de l'espace de Teichmüller.

Rappelons que l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(\Sigma)$ de Σ est l'espace des classes d'isotopies de métriques hyperboliques sur Σ . Si $m \in \mathcal{T}(\Sigma)$ et $\alpha \in \mathcal{C}$, on note $\ell_m(\alpha)$ la longueur du représentant géodésique pour m de α . L'espace $\mathcal{T}(\Sigma)$ est homéomorphe à \mathbb{R}^{6g-6} (voir [FLP, Expo. 8]) et l'application $m \mapsto (\ell_m(\alpha))_{\alpha \in \mathcal{C}}$ de $\mathcal{T}(\Sigma)$ dans $(\mathbb{R}^+)^{\mathcal{C}}$ est un homéomorphisme sur son image. Il existe plusieurs compactifications de l'espace $\mathcal{T}(\Sigma)$ (voir par exemple [Pau1]). Pour montrer comment notre compactification de l'espace projectif $\mathbb{P}\text{Flat}(\Sigma)$ s'inscrit dans la théorie de Teichmüller, on présente succinctement trois d'entre elles.

• **La compactification (originale) de Thurston.** Soit $\mathbb{P}\mathbb{R}^{\mathcal{C}} = (\mathbb{R}_+^{\mathcal{C}} - \{0\})/\mathbb{R}_+^*$ le projectifié de $\mathbb{R}_+^{\mathcal{C}}$, et soit π la projection canonique. L'application $m \mapsto \pi((\ell_m(\alpha))_{\alpha \in \mathcal{C}})$ est un plongement de $\mathcal{T}(\Sigma)$ dans $\mathbb{P}\mathbb{R}^{\mathcal{C}}$.

Soit $\mathcal{MF}(\Sigma)$ l'espace des classes d'équivalence de feuilletages singuliers (transversalement) mesurés sur Σ , avec des singularités de type selle à k branches ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$), définis à isotopies et mouvements de Whitehead près (voir [FLP, Exp. 5]). L'ensemble des classes d'isotopie de courbes

fermées simples essentielles, pondérées par des poids strictement positifs, se plonge naturellement en un sous-ensemble dense de $\mathcal{MF}(\Sigma)$, et le nombre d'intersection géométrique se prolonge de manière unique en une application $i : \mathcal{MF}(\Sigma) \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$. L'application $(\mathcal{F}, \mu) \mapsto (i((\mathcal{F}, \mu), \alpha))_{\alpha \in \mathcal{S}}$ définit un plongement du projectif $\mathbb{P}\mathcal{MF}(\Sigma)$ de $\mathcal{MF}(\Sigma)$ dans $\mathbb{PR}^{\mathcal{S}}$, dont l'image est le bord de l'adhérence de l'image de $\mathcal{S}(\Sigma)$.

Le défaut de cette compactification est qu'il n'y a pas de lien naturel entre les feuilletages mesurés, qui sont des objets analytiques, et les métriques hyperboliques, qui sont des objets géométriques, et la "convergence" d'une suite de métriques vers un feuilletage mesuré est contre-intuitive.

• **La compactification de Bonahon.** Soit $\mathcal{ML}(\Sigma)$ l'espace des laminations hyperboliques mesurées sur Σ (pour une métrique hyperbolique finie quelleconque). Il existe une bijection préservant les nombres d'intersection entre les espaces $\mathcal{MF}(\Sigma)$ et $\mathcal{ML}(\Sigma)$ (voir [Lev]), par laquelle on les identifie.

Soient $\partial_\infty \tilde{\Sigma}$ le bord à l'infini de $\tilde{\Sigma}$ et $\partial_\infty^2 \tilde{\Sigma} = \partial_\infty \tilde{\Sigma} \times \partial_\infty \tilde{\Sigma} - \Delta$, avec $\Delta = \{(x, x), x \in \partial_\infty \tilde{\Sigma}\}$. Un courant géodésique sur Σ est une mesure de Radon non nulle sur $\partial_\infty^2 \tilde{\Sigma}$, qui est invariante par Γ et par $\iota : (x, y) \mapsto (y, x)$. On munit l'ensemble $\mathbf{C}(\Sigma)$ des courants géodésiques de la topologie faible-*. Pour rendre naturelle la convergence d'une suite de métriques hyperboliques vers un feuilletage mesuré, Bonahon plonge de manière disjointe l'espace $\mathcal{S}(\Sigma)$ et le projectif $\mathbb{P}\mathcal{ML}(\Sigma)$ de $\mathcal{ML}(\Sigma)$ dans le projectif $\mathbb{P}\mathbf{C}(\Sigma)$ de l'espace des courants géodésiques sur Σ , qui est compact (voir [Bon3]). De plus, il montre que le bord de l'adhérence de l'image de $\mathcal{S}(\Sigma)$ dans $\mathbb{P}\mathbf{C}(\Sigma)$ est l'image de $\mathbb{P}\mathcal{ML}(\Sigma)$.

Cette compactification est isomorphe à la compactification de Thurston. Elle a pour avantage de plonger les espaces $\mathcal{S}(\Sigma)$ et $\mathbb{P}\mathcal{MF}(\Sigma)$ (identifié à $\mathbb{P}\mathcal{ML}(\Sigma)$) dans un même espace, ce qui rend naturelle la convergence d'une suite de métriques hyperboliques vers un feuilletage mesuré. Cependant, ce n'est pas une compactification géométrique.

• **La compactification géométrique de Bestvina et Paulin.** C'est une compactification géométrique de $\mathcal{S}(\Sigma)$, qui a inspiré celle de ce manuscrit. Soit \mathbb{PT} l'ensemble des classes d'homothéties d'arbres duaux à une lamination hyperbolique mesurée sur Σ . La réunion disjointe $X = \mathcal{S}(\Sigma) \coprod \mathbb{PT}$ est munie de la topologie quotient de la topologie de Gromov équivariante, et [Pau3] montre que $\mathcal{S}(\Sigma)$ est un ouvert dense de X , qui est compact. Cette compactification est également fondée sur la description des ultralimites de suites de revêtements universels de Σ munie de métriques hyperbolique, qui sont soit un revêtement universel de Σ munie d'une métrique hyperbolique, soit un arbre réel. Cette compactification est également isomorphe à la compactification de Thurston, et permet de comprendre géométriquement les dégénérescences de suite de métriques hyperboliques.

Dans leur article [DLR], Duchin-Leininger-Rafi plongent l'espace projectif $\mathbb{P}\text{Flat}(\Sigma)$ (identifié à l'espace $\text{Flat}^1(\Sigma)$ des classes d'isotopie de structures de demi-translation sur Σ d'aire 1) dans le projectif $\mathbb{P}\mathbf{C}(\Sigma)$ de l'espace des courants géodésiques sur Σ , à la manière de Bonahon dans [Bon3]. Ils définissent l'espace $\text{Mix}(\Sigma)$ des courants géodésiques qui sont la somme d'une lamination hyperbolique mesurée (vu comme un courant géodésique) et d'un courant géodésique défini par des structures de demi-translation sur des sous-surfaces de Σ , tels que le courant défini par la lamination hyperbolique mesurée a un nombre d'intersection nul avec le courant défini par les structures de demi-translation. Ils montrent alors que l'image de $\text{Flat}(\Sigma)$ est un ouvert dense de $\text{Mix}(\Sigma)$, et que le projectif $\mathbb{P}\text{Mix}(\Sigma) \subseteq \mathbb{P}\mathbf{C}(\Sigma)$ est compact. Comme la compactification de [Bon3], cette compactification utilise des outils analytiques et n'est pas géométrique.

Notre compactification consiste à définir un espace $\text{Mix}(\Sigma)$ de classes d'isométries, équivariantes pour l'action de Γ , d'espaces métriques appelés *structures mixtes*, muni de la topologie de Gromov

équivariante, dans lequel $\text{Flat}(\Sigma)$ se plonge naturellement en un ouvert dense, et tel que le projectif $\mathbb{P} \text{Mix}(\Sigma)$, muni de la topologie quotient, est compact. Nous montrerons (voir la partie 3.5.10) en utilisant le théorème 1.1.3 que cette compactification est isomorphe à la compactification de [DLR].

1.3 Laminations plates mesurées.

L'espace des laminations hyperboliques mesurées, introduit par Thurston, joue un rôle central dans la paramétrisation de l'espace des métriques hyperboliques sur les variétés non compactes de dimension 3 et dans la description des dégénérescences de métriques hyperboliques sur les surfaces.

Par exemple, le théorème (évoqué en préambule) des laminations terminales de Minsky et Brock-Canary-Minsky, qui répond à une conjecture de Thurston, affirme qu'une variété hyperbolique de dimension 3 dont le groupe fondamental est de type fini est uniquement déterminée par sa géométrie asymptotique. Si M est une variété hyperbolique de dimension 3 dont le groupe fondamental est de type fini, si M n'a pas de pointes paraboliques, les bouts de M sont de deux types géométriques auxquels sont associés deux types d'invariants, qui définissent de manière unique la métrique hyperbolique. Aux bouts géométriquement infinis sont associés des invariants qui sont des laminations géodésiques hyperboliques sur des surfaces (voir par exemple [Lec]).

Nous avons vu aussi que l'espace des laminations hyperboliques mesurées apparaît comme le bord de la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller d'une surface (si on l'identifie à l'espace des classes d'équivalence de feuilletages mesurés, à isotopies et mouvements de Whitehead près), et de celle de Bonahon. Si $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de métriques hyperboliques qui ne converge pas vers une métrique hyperbolique, il existe une lamination hyperbolique mesurée (Λ, μ) sur Σ telle que pour tous $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, la suite $\frac{\ell_{m_n}(\alpha)}{\ell_{m_n}(\beta)}$ converge vers $\frac{i(\alpha, (\Lambda, \mu))}{i(\beta, (\Lambda, \mu))}$.

De même, les laminations hyperboliques mesurées apparaissent dans les dégénérescences de suites de structures de demi-translation, dans la compactification de ce manuscrit, où elles sont duales aux arbres minimaux des sous-groupe du groupe de revêtement qui préservent des arbres dans les ultralimites de suites de structures de demi-translation qui dégénèrent.

Il est donc naturel de chercher à généraliser l'espace des laminations géodésiques mesurées aux surfaces de demi-translation, où il apparaît également comme le complété de l'espace des géodésiques périodiques librement homotopes à une courbe fermée simple (que l'on appelle alors *non auto-entrelacée*). Il permet notamment de comprendre le comportement limite des suites de géodésiques périodiques non auto-entrelacées.

Nous définissons une généralisation des laminations hyperboliques mesurées aux surfaces munies de structures de demi-translation, que nous appelons *laminations plates mesurées*, et plus généralement, aux espaces métriques localement $\text{CAT}(0)$ enrubannés (i.e. dont le bord à l'infini du revêtement universel est muni d'un ordre cyclique total). Dans cette introduction, je ne présente que les laminations géodésiques sur les surfaces munies d'une structure de demi-translation.

Considérons toujours dans cette introduction une surface Σ compacte, connexe, orientable, sans bord, munie d'une structure de demi-translation $[q]$, et $p : (\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}]) \rightarrow (\Sigma, [q])$ un revêtement universel de groupe de revêtement Γ . Puisque $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ est une surface $\text{CAT}(0)$ sans bord, si $\tilde{\ell}$ est une géodésique de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$, le complémentaire de $\tilde{\ell}$ dans $\tilde{\Sigma}$ a deux composantes connexes. Deux géodésiques $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ sont dites *entrelacées* si $\tilde{\ell}_1$ intersecte les deux composantes connexes de $\tilde{\Sigma} - \tilde{\ell}_2$, et deux géodésiques locales de $(\Sigma, [q])$ sont dites entrelacées si elles ont des relevés dans $\tilde{\Sigma}$ qui sont entrelacés. On munit l'ensemble des géodésiques locales de $(\Sigma, [q])$, orientées mais non paramétrées,

de $(\Sigma, [q])$ de la topologie quotient de la topologie compacte-ouverte par l'action par translations à la source de \mathbb{R} sur les géodésiques locales paramétrées, que l'on appelle *topologie des géodésiques*.

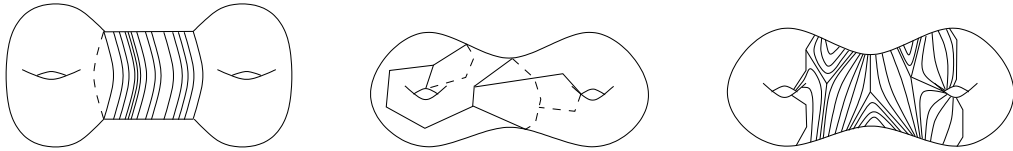
Définition 1.3.1 Une lamination géodésique de $(\Sigma, [q])$ est un ensemble non vide Λ de géodésiques locales complètes de $(\Sigma, [q])$, définies à changements d'origine près, dont les éléments sont appelés *feuilles*, tel que :

- les feuilles de Λ sont non auto-entrelacées et deux à deux non entrelacées ;
- Λ est invariant par changements d'orientation des feuilles ;
- Λ est fermé pour la topologie des géodésiques.

On appellera *support* de Λ la réunion des images des feuilles de Λ .

Une lamination *cylindrique* sur $(\Sigma, [q])$ est une lamination dont les images des feuilles sont contenues dans l'adhérence d'un cylindre plat non dégénéré (elles sont alors périodiques). Une lamination Λ de $(\Sigma, [q])$ est dite *minimale* si elle ne contient pas de sous-lamination stricte. C'est alors l'adhérence, pour la topologie des géodésiques, de la réunion d'une feuille ℓ et de son inverse. Si l'image de ℓ n'est pas compacte, alors Λ est dite *de type récurrent*. Nous montrerons qu'alors toutes les feuilles de Λ sont d'image dense dans un domaine de $(\Sigma, [q])$, c'est-à-dire l'adhérence d'un ouvert connexe, bordé par des géodésiques locales périodiques, s'il n'est pas égal à Σ , et que les images des feuilles régulières (i.e. qui ne rencontrent pas de singularité) sont les feuilles régulières du feuilletage vertical d'une différentielle quadratique holomorphe dans la classe de $[q]$. Si l'image de ℓ est compacte (c'est alors un graphe fini), et si ℓ ou son inverse n'est pas périodique à partir d'un certain temps, alors Λ est dite *de type graphe fini* (nous montrerons qu'alors toutes ses feuilles ont la même image, et qu'aucune n'est périodique à partir d'un certain temps). Une paire de feuilles périodiques opposées est également un exemple de lamination minimale.

L'ensemble des géodésiques locales d'images les feuilles d'un feuilletage vertical minimal d'une différentielle quadratique holomorphe q sur Σ , est un exemple de lamination plate minimale de type récurrent, pour la structure de demi-translation définie par q (voir le lemme 4.2.12 pour les feuilles singulières).



On dit qu'un bout d'une feuille d'une lamination plate *aboutit* dans une sous-lamination minimale ou dans une sous-lamination cylindrique s'il existe un rayon dans la classe du bout qui est un rayon d'une feuille de la composante minimale ou un rayon d'une composante de bord du cylindre plat correspondant. Nous renvoyons à la partie 4.4 pour plus de détails. Le résultat principal de cet article est le théorème suivant de classification des laminations géodésiques sur $(\Sigma, [q])$, si Σ est compacte.

Théorème 1.3.2 Soit Λ une lamination géodésique sur une surface compacte, connexe, munie d'une structure de demi-translation. Alors Λ est la réunion d'un nombre fini de sous-laminations cylindriques, et de sous-laminations minimales de type récurrent ou de type graphe fini, ou paire de feuilles périodiques opposées d'images non contenues dans un cylindre plat (non dégénéré), et de feuilles isolées (pour la topologie des géodésiques) dont chacun des bouts aboutit dans une sous-lamination minimale ou dans une sous-lamination cylindrique.

Si G est un graphe métrique (voir la partie 4.3), une *orientation cyclique* de G est la donnée, pour chaque sommet x de G , d'un ordre cyclique sur l'ensemble des germes de rayons géodésiques issus de x . On appelle *graphe cycliquement ordonné* un graphe muni d'une orientation cyclique. On montre aussi le théorème suivant.

Théorème 1.3.3 (voir le théorème 4.3.2) *Soit (G, or) un graphe fini, connexe, cycliquement ordonné, sans sommet terminal. Alors G est le support d'une lamination minimale non dénombrable, donc notamment dont aucune feuille n'est périodique à partir d'un certain temps, si et seulement si (G, or) n'est pas isomorphe à un cercle, une paire d'haltères, un huit plat ou un théta plat, par un isomorphisme préservant l'orientation cyclique (c'est-à-dire*

$\bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \ominus$, où les orientations cycliques sont données par l'orientation du plan).

Si m est une métrique hyperbolique complète et $[q]$ est une structure de demi-translation sur Σ , et si \tilde{m} et $[\tilde{q}]$ sont les tirés en arrière de m et $[q]$ sur $\tilde{\Sigma}$, on rappelle qu'il existe un unique homéomorphisme Γ -équivariant entre les bords à l'infini de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ et de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$, par lequel on les identifie. On rappelle que l'on note $\partial_\infty \tilde{\Sigma}$ le bord à l'infini, et $\partial_\infty^2 \tilde{\Sigma} = \partial_\infty \tilde{\Sigma} \times \partial_\infty \tilde{\Sigma} - \{(x, x), x \in \partial_\infty \tilde{\Sigma}\}$. Si g est une géodésique de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ ou de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$, on note $E(g) = (g(-\infty), g(+\infty))$ son couple de points à l'infini. Pour tout couple $(x, y) \in \partial_\infty^2 \tilde{\Sigma}$, il existe une unique géodésique $\tilde{\lambda}$ de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$ telle que $E(\tilde{\lambda}) = (x, y)$. En revanche, il existe au moins une géodésique $\tilde{\ell}$ de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ telle que $E(\tilde{\ell}) = (x, y)$, mais cette géodésique n'est pas nécessairement unique. Si elle n'est pas unique, l'ensemble des géodésiques de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ dont le couple de points à l'infini est (x, y) est un ensemble de géodésiques parallèles qui feuilletent une bande plate, et dont les projetés sont des géodésiques locales périodiques qui feuilletent un cylindre plat. De ce fait, l'application qui associe à une géodésique de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ l'unique géodésique de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$ ayant le même couple de points à l'infini définit une correspondance non bijective entre les géodésiques plates et hyperboliques, dont l'on déduit les résultats principaux de cet article, notamment les deux théorèmes ci-dessus.

Plusieurs phénomènes radicalement nouveaux apparaissent par rapport aux laminations hyperboliques : les feuilles d'une lamination plate ne sont généralement pas deux à deux disjointes, les laminations plates ne sont pas déterminées par leur support (des familles non dénombrables ont le même support, et une lamination plate peut ne pas être minimale même si les images de tous les rayons géodésiques de toutes ses feuilles sont denses dans son support (voir la remarque 4.2.10)). Les composantes cylindriques peuvent contenir des familles non dénombrables de feuilles. Enfin, il y a trois types de composantes minimales d'une lamination plate sur une surface compacte (feuille périodique parcourue dans les deux sens, composante minimale de type récurrent ou de type graphe fini), et non deux comme pour les laminations hyperboliques.

Il faut ensuite munir l'ensemble des laminations plates sur $(\Sigma, [q])$ d'une topologie qui permette de définir naturellement une projection continue de l'espace des laminations plates dans l'espace des laminations hyperboliques. Pour cela, on définit les mesures transverses aux laminations plates. Par rapport aux laminations hyperboliques, la principale difficulté pour définir les mesures transverses aux laminations plates est que les feuilles ne sont généralement pas deux à deux disjointes et que le support ne détermine pas la lamination, donc on ne va pas définir des mesures sur les arcs transverses à la lamination, mais sur les ensembles de géodésiques locales qui les intersectent transversalement, et il faut redéfinir la notion d'invariance par holonomie de ces familles de mesures. Nous renvoyons à la partie 5.1.1 pour une construction détaillée.

Chapitre 2

Rappels sur les surfaces munies d'une structure de demi-translation.

Ce chapitre regroupe les définitions et résultats principaux, qui interviennent dans tout le manuscrit, ainsi que des résultats classiques sur les différentielles quadratiques holomorphes sur les surfaces, qui permettent de comprendre comment la thèse s'inscrit dans la théorie de Teichmüller.

2.1 Espaces localement CAT(0).

Dans tout le manuscrit, nous utiliserons la terminologie de [BH] concernant les espaces métriques : espaces CAT(0), δ -hyperbolique... En particulier, une *géodésique* (resp. une *géodésique locale*) d'un espace métrique (X, d) est une application isométrique (resp. localement isométrique) $\ell : I \rightarrow X$ où I est un intervalle de \mathbb{R} . Nous dirons *segment*, *rayon* ou *droite géodésique* de X si I est respectivement un intervalle borné, une demi-droite (comme $[0, +\infty[$ ou $]0, +\infty[$) ou \mathbb{R} . S'il n'y a pas de précision, le terme *géodésique* désigne une droite géodésique. On appellera *germe* (de rayon géodésique) une classe d'équivalence de rayons géodésiques locaux pour la relation d'équivalence $r_1 \sim r_2$ si r_1 et r_2 coïncident sur un segment initial non vide et non réduit à un point.

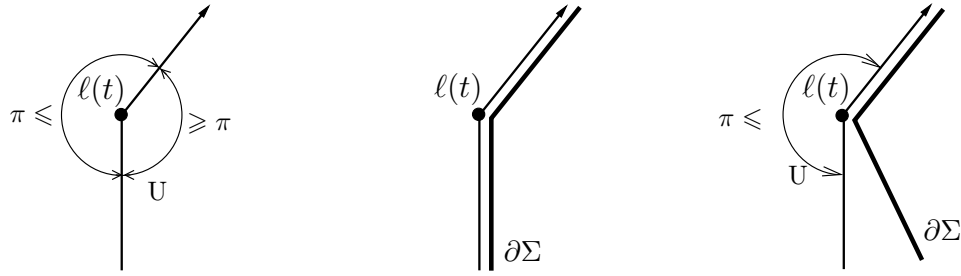
2.2 Structures de demi-translation.

Soit Σ une surface connexe, orientable, à bord (éventuellement vide). Supposons que Σ soit munie d'une métrique euclidienne sur $\Sigma - Z$, où Z est une partie discrète de Σ . Si l'holonomie de tout lacet fermé, \mathcal{C}^1 par morceaux, de $\Sigma - Z$ est contenue dans $\{\pm \text{Id}\}$, on dit que deux vecteurs tangents v_1 et v_2 à Σ sont *de même direction*, si v_2 est l'image de $\pm v_1$ par holonomie le long d'un chemin \mathcal{C}^1 par morceaux de $\Sigma - Z$. On dit qu'une réunion de chemins, \mathcal{C}^1 par morceaux, est *de direction constante*, si tous ses vecteurs tangents, aux points de $\Sigma - Z$, sont de même direction.

Définition 2.2.1 Une structure de demi-translation (ou structure plate à holonomie $\{\pm \text{Id}\}$) sur une surface Σ est la donnée d'une partie discrète Z de Σ (éventuellement vide) et d'une métrique euclidienne sur $\Sigma - Z$ à singularité conique d'angle $k_z\pi$ en $z \in Z$, avec $k_z \in \mathbb{N}$ et $k_z \geq 3$ si $z \in Z - Z \cap \partial\Sigma$ et $k_z \geq 2$ si $z \in Z \cap \partial\Sigma$, telle que l'holonomie de tout lacet fermé, \mathcal{C}^1 par morceaux, de $\Sigma - Z$ soit contenue dans $\{\pm \text{Id}\}$ et telle que le bord soit de direction constante.

Une structure de demi-translation définit une distance d qui est localement CAT(0). Nous appellerons *géodésiques locales plates* les géodésiques locales d'une structure de demi-translation. Une application continue $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ est une géodésique locale plate si et seulement si elle vérifie (voir [Str, Th. 5.4 p.24] et [Str, Th. 8.1 p. 35]) : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

- si $\ell(t)$ n'appartient pas à Z , il existe un voisinage V de t dans \mathbb{R} tel que $\ell|_V$ soit un segment euclidien (donc de direction constante) ;
- si $\ell(t)$ appartient à $Z - Z \cap \partial\Sigma$, alors les deux angles définis par $\ell([t, t + \varepsilon])$ et $\ell([t - \varepsilon, t])$, avec $\varepsilon > 0$ assez petit, mesurés dans chaque composante connexe de $U - \ell([t - \varepsilon, t + \varepsilon])$, où U est un voisinage assez petit de $\ell(t)$, sont supérieurs ou égaux à π ;
- si $\ell(t)$ appartient à $Z \cap \partial\Sigma$, alors l'angle défini par $\ell([t, t + \varepsilon])$ et $\ell([t - \varepsilon, t])$, avec $\varepsilon > 0$ assez petit, mesuré dans la composante connexe de $U - \ell([t - \varepsilon, t + \varepsilon])$ disjointe de $\partial\Sigma$, où U est un voisinage assez petit de $\ell(t)$, est supérieur ou égal à π .



Une *liaison de singularités* d'une structure de demi-translation est l'image d'un segment géodésique local (fermé) entre deux singularités (éventuellement confondues) qui ne rencontre pas de singularité en dehors de ses extrémités. Puisque les géodésiques locales ne peuvent changer de direction qu'aux singularités, une liaison de singularités est de direction constante.

Soit $p : (\tilde{\Sigma}, \tilde{d}) \rightarrow (\Sigma, d)$ un revêtement universel. L'espace $(\tilde{\Sigma}, \tilde{d})$ est une surface munie d'une structure de demi-translation qui est CAT(0) et propre. Nous noterons $\partial_\infty \tilde{\Sigma}$ son bord à l'infini.

2.3 Différentielles quadratiques holomorphes et structures plates dirigées.

Soit Σ une surface connexe, orientable, à bord (éventuellement vide). Rappelons qu'une structure de surface de Riemann à bord sur Σ est la donnée d'un atlas maximal de carte $(z_\nu : U_\nu \rightarrow V_\nu)_{\nu \in \tau}$, où $\{U_\nu\}_{\nu \in \tau}$ est un recouvrement ouvert de Σ et pour tout $\nu \in \tau$, l'application z_ν est un homéomorphisme sur un ouvert (relatif) V_ν de $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \geq 0\}$, tel que les changements de cartes soient holomorphes (voir par exemple [Str, Déf. 1.2 p. 2]). Le bord de Σ est l'ensemble des points x de Σ tels qu'il existe une carte de cette structure contenant x , envoyant x sur l'axe réel, ce qui ne dépend pas d'une telle carte. Muni de la restriction des cartes, le bord de Σ est une variété analytique réelle de dimension 1, non connexe a priori.

Définition 2.3.1 Une *différentielle quadratique holomorphe* sur Σ est la donnée d'une structure de surface de Riemann à bord X sur Σ et d'une famille q de fonctions holomorphes $(q_{U,z} : U \rightarrow \mathbb{C})_{(U,z) \in X}$ telles que pour toutes les cartes locales (U, z) et (V, w) de X , on a

- (1) $q_{U,z}dz^2 = q_{V,w}dw^2$ sur $U \cap V$;
- (2) l'image $q_{U,z}(U \cap \partial\Sigma)$ de $U \cap \partial\Sigma$ est contenue dans $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$.

Remarque. D'après la condition (1), il suffit de définir les différentielles quadratiques holomorphes $q_{U,z}dz^2$ pour une sous-famille de cartes locales qui recouvre Σ . Cette famille peut être finie si Σ est compacte. Si (U, z) et (V, w) sont des cartes locales et si $y \in U \cap V$, alors $q_{V,w}(y) = q_{U,z}(y) \frac{dz(v)^2}{dw(v)^2}$. Donc $q_{V,w}(y) \in \mathbb{R}^-$ si et seulement si $q_{U,z}(y) \in \mathbb{R}^-$, et il suffit de vérifier la deuxième condition pour une sous-famille de cartes locales qui recouvre le bord. Cette condition impose que l'image d'un segment du bord par un paramètre naturel (voir par exemple [Str, 5.1 p. 21]), défini par q au voisinage d'un point régulier, soit vertical.

On note $\tilde{\mathcal{Q}}(\Sigma)$ l'ensemble des différentielles quadratiques holomorphes sur Σ et seulement q une différentielle quadratique holomorphe (X, q) lorsque la structure sous-jacente est sous-entendue.

Remarque. Soient $p : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ un revêtement de Σ et (X, q) une différentielle quadratique holomorphe sur Σ . Le couple de la structure de surface de Riemann à bord X' tirée en arrière de X sur Σ' et de la famille $q' = (q_{p(V), z \circ (p|_V)^{-1}} \circ p|_V)_{(V,z)}$, où (V, z) parcourt l'ensemble des cartes locales de X' telles que $p|_V$ est un difféomorphisme sur son image définit une différentielle quadratique holomorphe sur Σ' , dite relevée de (X, q) , d'après la remarque précédente.

Le groupe $\text{Diff}_0(\Sigma)$ des isotopies de Σ qui fixent point par point $\partial\Sigma$ et sont homotopes à l'identité par des applications qui fixent point par point $\partial\Sigma$, agit sur $\tilde{\mathcal{Q}}(\Sigma)$ par précomposition des cartes et des expressions des différentielles quadratiques holomorphes dans ces cartes. On note $\mathcal{Q}(\Sigma)$ le quotient de $\tilde{\mathcal{Q}}(\Sigma)$ par cette action.

Définition 2.3.2 Une structure plate dirigée sur Σ est la donnée :

- d'une partie discrète Z de Σ (éventuellement vide) ;
- d'une métrique euclidienne à singularité conique d'angle $k_z\pi$ en $z \in Z$, avec $k_z \in \mathbb{N}$ et $k_z \geq 3$ si $z \in Z - Z \cap \partial\Sigma$ et $k_z \geq 2$ si $z \in Z \cap \partial\Sigma$;
- d'un champ de droites parallèles V sur $\Sigma - Z$, tel que pour tout $x \in \partial\Sigma - Z \cap \partial\Sigma$, la droite $V(x)$ soit contenue dans $T_x\partial\Sigma$.

Le groupe $\text{Diff}_0(\Sigma)$ agit sur l'ensemble des structures plates dirigées sur Σ par tirés en arrière de la métrique et du champ de droites parallèles. On note $\widetilde{\text{Flat}}(\Sigma)$ le quotient de l'ensemble des structures plates dirigées par cette action (voir la fin de cette partie pour une explication de la notation).

La donnée d'une différentielle quadratique holomorphe définit une métrique euclidienne à singularités coniques du bon type sur Σ et, un champ de droites parallèles (verticales) sur le complémentaire des singularités. L'application qui à une différentielle quadratique holomorphe associe cette structure plate dirigée est $\text{Diff}_0(\Sigma)$ -équivariante et définit une application entre les espaces quotient pour les actions de $\text{Diff}_0(\Sigma)$, qui est une bijection car Σ est orientable, par laquelle on identifie $\mathcal{Q}(\Sigma)$ et $\widetilde{\text{Flat}}(\Sigma)$.

Le groupe $(\mathbb{R}, +)$ agit sur $\mathcal{Q}(\Sigma)$ par l'application $(\theta, (X, q)) \mapsto (X, e^{2i\theta}q)$. Si $(X, q) \in \mathcal{Q}(\Sigma)$, on note $(X, [q])$, ou plus simplement $[q]$, sa classe d'équivalence pour cette action. De même, il agit sur l'ensemble des structures plates dirigées par rotation des champs de vecteurs parallèles. De plus, la

bijection entre $\mathcal{Q}(\Sigma)$ et $\widetilde{\text{Flat}}(\Sigma)$ est équivariante pour ces actions et définit une bijection entre les espaces quotients.

Une structure plate dirigée est en particulier une structure de demi-translation, d'après l'existence d'un champ de droites parallèles. Il existe donc une application d'oubli de l'ensemble des structures plates dirigées dans l'ensemble des structures de demi-translation, qui est invariante pour l'action par rotation de \mathbb{R} . Elle définit donc une application du quotient de $\text{Flat}(\Sigma)$ par cette action à valeurs dans l'ensemble des structures de demi-translation, qui est une bijection. On identifie ainsi l'ensemble des structures de demi-translation avec l'espace quotient $\text{Flat}(\Sigma) = \mathbb{R} \backslash \widetilde{\text{Flat}}(\Sigma)$, et on notera $[q]$, avec $q \in \mathcal{Q}(\Sigma)$, une structure de demi-translation. On ne confondra pas une surface de demi-translation qui peut être définie comme un couple (Σ, q) où $q \in \mathcal{Q}(\Sigma)$, et la structure de demi-translation $[q]$ qui lui est associée.

2.4 Action de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ sur l'espace de modules de différentielles quadratiques holomorphes.

L'objet principal de ce manuscrit est d'étudier les déformations asymptotiques de structures de demi-translation sur une surface. Soit Σ une surface connexe, orientable. Rappelons que l'ensemble des structures de demi-translation s'identifie au quotient de l'espace $\mathcal{Q}(\Sigma) - \{0\}$ des différentielles quadratiques holomorphes non nulle sur Σ par l'action par rotation de $\text{SO}(2)$. Le groupe linéaire $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ des automorphismes linéaires de \mathbb{R}^2 de déterminant 1 agit sur l'espace $\mathcal{Q}(\Sigma)$ par post-compositions des cartes de la structure complexe et des expressions de la différentielle quadratique holomorphe dans ces cartes. Cette action définit un large champ de déformations des différentielles quadratiques holomorphes sur une surface, qui est le sujet de nombreux travaux. Dans cette partie 2.4, on rappelle des résultats bien connus sur l'espace $\mathcal{Q}(\Sigma)$ et sur l'action du groupe $\text{SL}_2(\mathbb{R})$, en particulier du sous-groupe $\left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \right\}_{t \in \mathbb{R}}$.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie 2.4 que Σ est compacte et que $\chi(\Sigma) < 0$.

L'application qui à une différentielle quadratique holomorphe (X, q) associe la structure de surface de Riemann sous-jacente X définit une application de $\mathcal{Q}(\Sigma)$ dans l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(\Sigma)$. Si Σ est de genre $g \geq 2$, alors $\mathcal{T}(\Sigma)$ est homéomorphe à \mathbb{C}^{3g-3} et l'espace $\mathcal{Q}(\Sigma)$ s'identifie naturellement à l'espace cotangent à $\mathcal{T}(\Sigma)$. L'espace $\mathcal{Q}(\Sigma)$ est la réunion d'un nombre fini de strates $Q(k_1, \dots, k_n)$, avec $k_i \in \mathbb{N}^*$, qui sont les ensembles de (classes d'isotopie de) différentielles quadratiques holomorphes avec n zéros, d'ordres k_1, \dots, k_n .

On renvoie par exemple à [MS3] pour les conditions que doivent vérifier les zéros pour qu'une strate soit non vide. Hormis les strates de différentielles quadratiques holomorphes n'ayant qu'un seul zéro, les strates ne sont pas fermées, car deux suites de zéros d'une suite de différentielles quadratiques holomorphes dans une strate peuvent converger vers un seul zéro, d'ordre supérieur.

Le groupe $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ agit sur chacune des strates, et cette action préserve l'aire des surfaces de demi-translation correspondantes. L'action du sous-groupe $\text{SO}(2) = \{r_t = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}\}_{t \in \mathbb{R}}$ de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ est l'action par rotation du champ de droites parallèles sur Σ , définit par la différentielle quadratique holomorphe. L'action de r_t , avec $t \in \mathbb{R}$, sur $q \in \mathcal{Q}(\Sigma)$ est la multiplication par e^{2it} des expressions de q dans les cartes. Comme vu précédemment, le quotient de $\mathcal{Q}(\Sigma)$ par cette action est l'espace $\text{Flat}(\Sigma)$.

L'action du sous-groupe $\{h_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}_{t \in \mathbb{R}}$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est le flot *horocylique* (de Teichmüller).

L'action du sous-groupe $\{g_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}\}_{t \in \mathbb{R}}$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ correspond au flot géodésique (de Teichmüller) sur $\mathcal{Q}(\Sigma)$. Soit $q \in \mathcal{Q}(\Sigma) - \{0\}$. Alors q définit un atlas de cartes sur Σ privée des zéros de q , tels que les changements de cartes sont de la forme $z \mapsto \pm z + c$, avec $c \in \mathbb{C}$. Puisque ces changements de cartes préservent les feuilletages vertical et horizontal de \mathbb{C} , on peut définir des feuilletages vertical et horizontal sur Σ privée des zéros de q , qui se prolongent en des feuilletages singuliers, transverses, sur Σ . L'action de g_t avec $t \in \mathbb{R}$ correspond à une dilatation des longueurs d'un facteur $e^{t/2}$ le long des feuilles horizontales, et à une contraction des longueurs d'un facteur $e^{t/2}$ le long des feuilles verticales. L'action de $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur $\mathcal{Q}(\Sigma)$ se projettent en une action de $\{g_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ sur $\mathcal{T}(\Sigma)$, qui est le flot géodésique de $\mathcal{T}(\Sigma)$. Un résultat central pour l'action de $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est le suivant.

Théorème 2.4.1 (voir [Mas2, Vee2]) *Le flot géodésique $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ agit ergodiquement (pour la mesure de Lebesgue qui est finie) sur chacune des composantes connexes des strates des surfaces d'aire 1.*

Ceci implique que les orbites pour l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ dans les composantes connexes des strates (décrites dans les travaux de Kontsevich, Zorich, Laneeau [Lan]) sont génériquement denses. Mais ce théorème ne décrit pas le comportement d'orbites particulières. Par exemple, si (Σ, q) est la réunion de cylindres plats feuilletés par des feuilles périodiques de direction verticale, alors l'orbite $\{g_t \cdot q\}_{t \in \mathbb{R}}$ diverge vers un cusp de la strate. Son image dans le projectifié $\mathbb{P}\mathrm{Flat}(\Sigma)$ de l'espace des structures de demi-translation converge vers l'arbre dual au feuilletage vertical de q , dans le projectifié $\mathbb{P}\mathrm{Mix}(\Sigma)$ de l'espace des structures mixtes sur Σ . De manière générale, nous verrons que si $q \in \mathcal{Q}(\Sigma)$, alors il existe une suite dans l'image de l'orbite $\{g_t \cdot q\}_{t \in \mathbb{R}}$ dans $\mathbb{P}\mathrm{Flat}(\Sigma)$ qui converge vers l'arbre dual au feuilletage vertical de q , dans $\mathbb{P}\mathrm{Mix}(\Sigma)$.

Le théorème 2.4.1 n'est que le début de l'étude dynamique et ergodique des espaces de surfaces de demi-translation, voir par exemple [AGY, ERS, EKZ, HMU, Lan]

Chapitre 3

Geometric compactification of moduli spaces of half-translation structures on surfaces.

3.1 Isometric action of the covering group on the universal cover of a surface endowed with a half-translation structure.

In the whole article, we use the notation and definitions of Chapter 2. Let Σ be a connected, orientable surface, with possibly empty boundary. We begin this section 3.1 with some definitions and reminders. Let $\mathcal{C}(\Sigma)$ and $\mathcal{S}(\Sigma)$ be the sets of free homotopy classes of essential closed curves and essential simple closed curves on Σ . Let $\alpha \in \mathcal{C}(\Sigma)$. If m is a hyperbolic metric on Σ with geodesic boundary, then α has a unique m -geodesic representative. However, if $[q]$ is a half-translation structure on Σ , then α has at least a $[q]$ -geodesic representative, but it may not be unique. In that case, the set of geodesic representatives foliates a maximal flat cylinder (with singular points on its boundary components, if they are not a boundary component of Σ), whose interior is embedded into $(\Sigma, [q])$. We denote by $\ell_m(\alpha)$ and $\ell_{[q]}(\alpha)$ the lengths of the geodesic representatives of α .

In this Section, we will consider (complete) hyperbolic metrics and half-translation structures on Σ . Whereas a hyperbolic (local) geodesic is uniquely determined by its image (up to changing the origin), a flat (local) geodesic is not. However, we will sometimes still denote by ℓ the image of a flat (local) geodesic ℓ , if there is no confusion. Let d be the distance defined by a half-translation structure or a hyperbolic metric on Σ , and let $p : (\tilde{\Sigma}, \tilde{d}) \rightarrow (\Sigma, d)$ be a universal cover, with covering group denoted by Γ . Since (Σ, d) is complete and locally CAT(0), according to the Cartan-Hadamard theorem, the space $(\tilde{\Sigma}, \tilde{d})$ is complete and CAT(0). We will denote by $\partial_\infty \tilde{\Sigma}$ the boundary at infinity of $(\tilde{\Sigma}, \tilde{d})$ and $\partial_\infty^2 \tilde{\Sigma} = \partial_\infty \tilde{\Sigma} \times \partial_\infty \tilde{\Sigma} - \Delta$ (with $\Delta = \{(x, x), x \in \partial_\infty \tilde{\Sigma}\}$). If Σ is a (possibly trivial) cover of a compact surface, which will always be the case in this article, the boundary at infinity $\partial_\infty \tilde{\Sigma}$ does not depend on the complete locally CAT(0) distance on Σ , up to a unique homeomorphism equivariant for the action of Γ . If g is a geodesic of $(\tilde{\Sigma}, \tilde{d})$, we denote by $E(g) = (g(-\infty), g(+\infty)) \in \partial_\infty^2 \tilde{\Sigma}$ its pair of points at infinity.

Let (X, d) be a complete CAT(0) metric space. Two geodesics c and c' of (X, d) are said to be at *finite Hausdorff distance* if there exists $K > 0$ such that $d(c(t), c'(t)) \leq K$ for all $t \in \mathbb{R}$.

Theorem 3.1.1 (see [BH, Th. 2.13 p.182]) *Let (X, d) be a CAT(0) metric space and let $c, c' : \mathbb{R} \rightarrow$*

X be two geodesics. If c and c' are at finite Hausdorff distance, the convex hull of $c(\mathbb{R}) \cup c'(\mathbb{R})$ is isometric to a flat strip $\mathbb{R} \times [0, D]$, with $D \geq 0$.

If (X, d) is endowed with an isometric action of a group Γ , for every $\gamma \in \Gamma$, the *translation distance* of γ is $\ell_X(\gamma) = \inf_{x \in X} d(x, \gamma x)$. The element γ is said to be *elliptic* if it has a fixed point in X , *parabolic* if $\ell_X(\gamma) = 0$ but γ has no fixed point in X , and *hyperbolic* if $\ell_X(\gamma) > 0$. Then, if (X, d) is complete (that will always be the case), there exists at least one geodesic $\text{Ax}(\gamma)$ called a *translation axis* of γ in (X, d) , which is invariant under γ and such that $d(x, \gamma x) = \ell_X(\gamma)$ if $x \in \text{Ax}(\gamma)$ (see [BH, Chap. 2.6]). Since the translation axes of a hyperbolic element are pairwise at finite Hausdorff distance, according to Theorem 3.1.1, if X is a surface, the union of all the translation axes of a hyperbolic element is a flat strip, possibly reduced to a single geodesic, or is isometric to $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ or to \mathbb{R}^2 .

Let $(\Sigma, [q])$ be a compact, connected surface endowed with a half-translation structure, and let $p : (\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}]) \rightarrow (\Sigma, [q])$ be a universal cover with covering group Γ , as in Section 2.2. We will need the Gauss-Bonnet formula for a half-translation structure on a surface. Let P be a compact subsurface of $(\Sigma, [q])$ with piecewise geodesic boundary. For every point $x \in \partial P$, the interior angle $\theta(x) > 0$ is the flat angle between the two germs at x of geodesic segments contained in ∂P , measured in the angular sector inside of P . For every point $x \in \overset{\circ}{P}$, the angle $\theta(x)$ is the total flat angle at x (i.e. $n\pi$ with $n \in \mathbb{N}$ and $n \geq 3$ if x is a singular point, and 2π otherwise).

Lemma 3.1.2 (see [MS2, p. 462]/[Dan, Prop. 3.6]) We have $2\pi\chi(P) = \sum_{x \in \overset{\circ}{P}} (2\pi - \theta(x)) + \sum_{x \in \partial P} (\pi - \theta(x))$.

Let us denote by or_x the cyclic order on the set of germs of segments starting at a point x induced by a choice of orientation on $\tilde{\Sigma}$. If $\tilde{\ell}$ is a geodesic of $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$, the complement of $\tilde{\ell}$ in $\tilde{\Sigma}$ may have more than two connected components if $\tilde{\ell}$ is not disjoint from $\partial\tilde{\Sigma}$. If $x \in \tilde{\Sigma} - \tilde{\ell}$, we denote by x_\perp the orthogonal projection of x onto $\tilde{\ell}$, and by r_x , r_+ and r_- the germs of $[x_\perp, x]$, of $[x_\perp, \tilde{\ell}(+\infty[$ and of $[x_\perp, \tilde{\ell}(-\infty[$ at x_\perp .

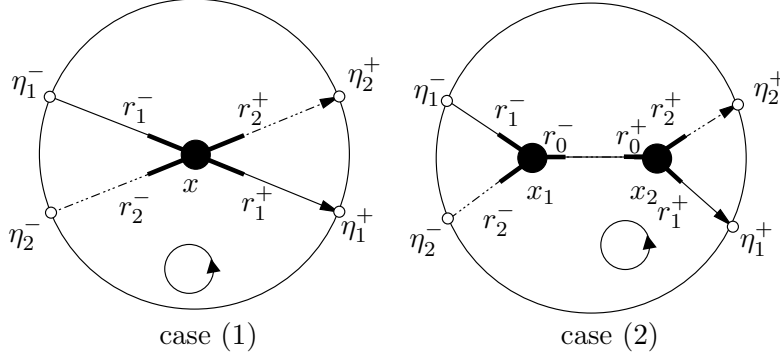
Definition 3.1.1 The side $+$ (resp. $-$) of $\tilde{\ell}$ is the (possibly non connected) union of points $x \in \tilde{\Sigma} - \tilde{\ell}$ such that $or_{x_\perp}(r_+, r_x, r_-) = 1$ (resp. -1).

Two geodesics $\tilde{\ell}_1$ and $\tilde{\ell}_2$ of $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ are *interlaced* if the image of $\tilde{\ell}_1$ intersects both sides of $\tilde{\ell}_2$. Two local geodesics of $(\Sigma, [q])$ are *interlaced* if they have some lifts in $\tilde{\Sigma}$ which are interlaced. A geodesic is *self-interlaced* if it is interlaced with itself. If two periodic geodesics of $(\Sigma, [q])$ are not interlaced, they are freely homotopic to two disjoint closed curves, and if a periodic geodesic is not self-interlaced it is freely homotopic to a simple closed curve.

Since $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ is CAT(0), if $\tilde{\ell}_1$ and $\tilde{\ell}_2$ are not disjoint, their intersection is isometric to a closed interval of \mathbb{R} . If there exists a (maximal) compact interval $I = [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$, possibly reduced to a point, such that $\tilde{\ell}_1|_I = \tilde{\ell}_2|_I$ (up to changing the orientations and the origins), let $x_1 = \ell_1(t_1)$ and $x_2 = \ell_1(t_2)$ be the endpoints of $\tilde{\ell}_1(I) = \tilde{\ell}_2(I)$, and let $r_1^-, r_2^-, r_1^+, r_2^+$ be the germs of $\ell_1([-\infty, t_1])$, $\ell_2([-\infty, t_1])$, $\ell_1([t_2, +\infty[)$ and $\ell_2([t_2, +\infty[)$, starting at x_1 and x_2 , and if $t_1 \neq t_2$, let r_0^-, r_0^+ be the germs at x_1 and x_2 of $\ell_1([t_1, t_1 + \varepsilon]) = \ell_2([t_1, t_1 + \varepsilon])$ and $\ell_1([t_2 - \varepsilon, t_2]) = \ell_2([t_2 - \varepsilon, t_2])$, with $\varepsilon > 0$ small enough. The following criterion is immediate.

Lemma 3.1.3 *Two geodesics $\tilde{\ell}_1$ and $\tilde{\ell}_2$ of $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ are interlaced if and only if one of these conditions is satisfied (with the notation introduced above) :*

- (1) $\tilde{\ell}_1$ and $\tilde{\ell}_2$ have a unique intersection point x and $or_x(r_1^+, r_2^+, r_1^-) = -or_x(r_1^+, r_2^-, r_1^-)$;
- (2) Up to changing the orientations and the origins, the restrictions of $\tilde{\ell}_1$ and $\tilde{\ell}_2$ to a maximal segment $[x_1, x_2]$, with $x_1 \neq x_2$, are equal, and $or_{x_2}(r_1^+, r_2^+, r_0^+) = or_{x_1}(r_1^-, r_2^-, r_0^-)$.



Corollary 3.1.4 *If $\tilde{\ell}_1$ and $\tilde{\ell}_2$ intersect each other transversally at a point which is not a singular point, then they are interlaced.*

Let ℓ be a periodic geodesic of $(\Sigma, [q])$ and let $\tilde{\ell}$ be a lift of ℓ in $\tilde{\Sigma}$, such that, up to changing $+/-$, the side $+$ of ℓ has only one connected component. Let $\gamma \in \Gamma - \{e\}$ be an element of the stabilizer of $\tilde{\ell}$, and let $x \in \tilde{\ell}$. Then, the *total curvature* of $[x, \gamma x[$ at side $+$ is the sum $\sum_{t \in [x, \gamma x[} (\pi - \theta^+(t))$, where $\theta^+(t)$ is the angle of $\tilde{\ell}$ at t measured in the side $+$.

Lemma 3.1.5 (see [Raf, Rem. 3.2] when $\partial\Sigma = \emptyset$, the extension being immediate) *The total curvature of $[x, \gamma x[$ at side $+$ is an integral multiple of π . It is zero, or it is at most $-\pi$.*

Let $\gamma \in \Gamma$ be a hyperbolic element of translation length $\ell(\gamma)$ and let $F(\gamma)$ be the (possibly degenerated) flat strip, union of all the translation axes of γ . Let $x \in \tilde{\Sigma}$ and let x_\perp be the orthogonal projection of x on $F(\gamma)$. Let $Ax(\gamma)$ be the translation axis of γ in $\tilde{\Sigma}$ that bounds $F(\gamma)$ and contains x_\perp .

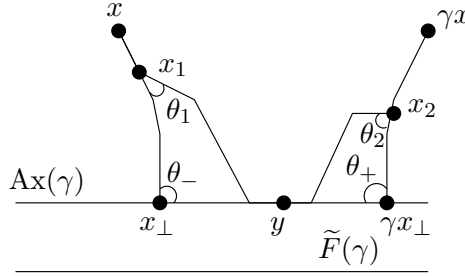
Lemma 3.1.6 *The segment $[x, \gamma x]$ meets $Ax(\gamma)$ and $d(x, \gamma x)^2 \geq \ell(\gamma)^2 + 2d(x, x_\perp)^2$.*

Proof. Let us consider the geodesic quadrilateral with vertices x , γx , γx_\perp and x_\perp . The two sides at the vertices x and γx may share an initial segment. Let $[x, x_1]$ (resp. $[\gamma x, x_2]$) be the intersection of the geodesic segments $[x, \gamma x]$ and $[x, x_\perp]$ (resp. $[\gamma x, x]$ and $[\gamma x, \gamma x_\perp]$). Assume for a contradiction that the geodesic segment $[x_1, x_2]$ does not meet $[x_\perp, \gamma x_\perp]$. Then, the closed curve $[x_1, x_2] \cdot [x_2, \gamma x_\perp] \cdot [\gamma x_\perp, x_\perp] \cdot [x_\perp, x_1]$ is simple and bounds a topological disk P . For all $t \in [x_\perp, \gamma x_\perp]$, we denote by $\theta(t)$ the angle made by the rays of $Ax(\gamma)$ starting at t , measured in the side of $Ax(\gamma)$ containing x , and we denote by θ_1, θ_2 the interior angles of P at x_1 and x_2 , and by θ_- and θ_+ the interior angles of P at x_\perp and γx_\perp . The segment $[\gamma x, \gamma x_\perp]$ is the image of $[x, x_\perp]$ by γ , hence $\theta_- + \theta_+ = \theta(x_\perp)$.

Since $\chi(P) = 1$, according to the Gauss-Bonnet formula (Lemma 3.1.2), we should have

$$\begin{aligned}
2\pi &\leq \sum_{z \in \overset{\circ}{P}} (2\pi - \theta(z)) + \pi - \theta_1 + \pi - \theta_2 + \pi - \theta_- + \pi - \theta_+ + \sum_{t \in]x_\perp, \gamma x_\perp[} (\pi - \theta(t)) \\
&\leq 3\pi - (\theta_1 + \theta_2) + \pi - (\theta_- + \theta_+) + \sum_{t \in]x_\perp, \gamma x_\perp[} (\pi - \theta(t)) \\
&< 3\pi + \sum_{t \in]x_\perp, \gamma x_\perp[} (\pi - \theta(t)),
\end{aligned}$$

whereas, according to Lemma 3.1.5, we have $\sum_{t \in]x_\perp, \gamma x_\perp[} (\pi - \theta(t)) \leq -\pi$. Hence, the segment $[x, \gamma x]$ meets $]x_\perp, \gamma x_\perp[$ at least at a point y .



Since $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ is CAT(0), we have

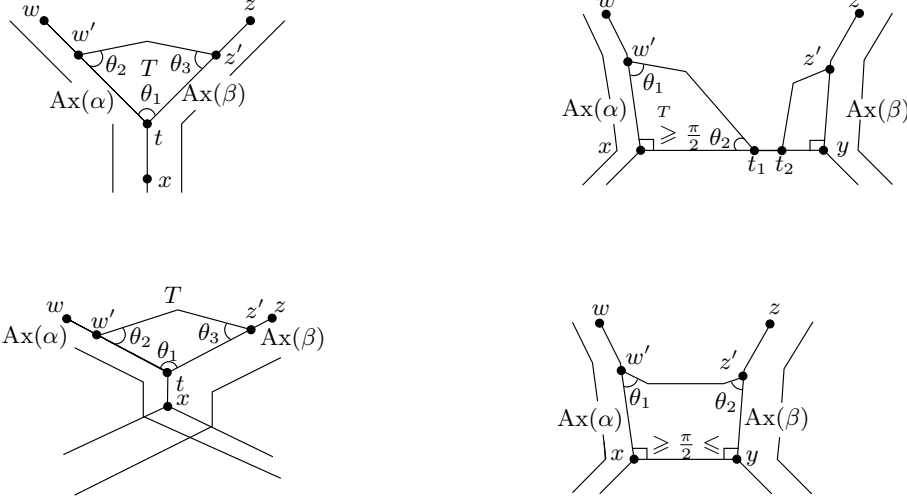
$$d(x, y)^2 \geq d(x, x_\perp)^2 + d(x_\perp, y)^2 \text{ and } d(y, \gamma x)^2 \geq d(\gamma x, \gamma x_\perp)^2 + d(y, \gamma x_\perp)^2,$$

hence $d(x, \gamma x)^2 \geq \ell(\gamma)^2 + 2d(x, x_\perp)^2$. □

Let $\text{Ax}(\alpha)$ and $\text{Ax}(\beta)$ be two translation axes of two hyperbolic elements $\alpha, \beta \in \Gamma$ that are not some powers of a common element. Then, their translation axes have no common point at infinity. Let w be a point of $\text{Ax}(\alpha)$ and z be a point of $\text{Ax}(\beta)$. We assume that $\text{Ax}(\alpha)$ and $\text{Ax}(\beta)$ are in the boundaries of the (possibly degenerated) flat strips union of all the translation axes of α and β , and that the segment $[w, z]$ does not meet a translation axis of α or β other than $\text{Ax}(\alpha)$ and $\text{Ax}(\beta)$. Since $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ is proper, there exists $x \in \text{Ax}(\alpha)$ and $y \in \text{Ax}(\beta)$ such that $d(x, y)$ minimizes the distance between $\text{Ax}(\alpha)$ and $\text{Ax}(\beta)$. It may happen that $x = y$, then $[x, y] = \{x\}$.

Lemma 3.1.7 *We have $d(z, w) \geq d(w, x) + d(z, y) + d(x, y) - 2(\ell(\alpha) + \ell(\beta))$.*

Proof. We denote by w' and z' the endpoints of the intersection $[w, z] \cap \text{Ax}(\alpha)$ and $[z, w] \cap \text{Ax}(\beta)$ (possibly equal to w and z).



Assume first that $x = y$. Since $\text{Ax}(\alpha)$ and $\text{Ax}(\beta)$ are distinct and respectively α and β -invariant, they can share a segment of length at most $\max\{\ell(\alpha), \ell(\beta)\}$. Let t be the endpoint of the intersection $[x, w] \cap [x, z]$ (possibly equal to x). Note that $t \in [w', x]$. If $w' = t$, then $z' = t$ and $d(z, w) = d(z, t) + d(t, w) \geq d(w, x) + d(z, x) - 2\max\{\ell(\alpha), \ell(\beta)\}$, which proves the result. Hence, we assume for now on that $w' \neq z'$. Assume for a contradiction that $d(w, t) > \ell(\alpha)$ or $d(z, t) > \ell(\beta)$. Let T be the triangle with vertices t, w' and z' . According to Lemma 3.1.5, by the assumption on $\text{Ax}(\alpha)$, $\text{Ax}(\beta)$, and on $[w, z]$, the sum of the total curvatures of $[t, w]$ and of $[t, z]$ at their sides containing T is at most $-\pi$, and according to the Gauss-Bonnet formula applied to T , if we denote by θ_1, θ_2 and θ_3 the interior angles of T at t, w' and z' , we should have $2\pi \leq 3\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - \pi < 2\pi$, a contradiction. Hence, we have $d(w', t) \leq \ell(\alpha)$ and $d(z', t) \leq \ell(\beta)$, and

$$\begin{aligned} d(z, w) &\geq d(z, z') + d(w, w') \geq d(w, x) - d(w', x) + d(z, x) - d(z', x) \\ &\geq d(w, x) - (\ell(\alpha) + \max\{\ell(\alpha), \ell(\beta)\}) + d(z, x) - (\ell(\beta) + \max\{\ell(\alpha), \ell(\beta)\}), \end{aligned}$$

which proves the result.

Assume next that $x \neq y$ and that $[w, z]$ meets $[x, y]$. Let t_1 and t_2 be the (possibly equal) endpoints of $[w, z] \cap [x, y]$, with t_1 the closest to x . If t_1 is distinct from x , let T be the triangle with vertices w', t_1 and x . Assume for a contradiction that $d(w', x) > \ell(\alpha)$. Then, by the assumption on $\text{Ax}(\alpha)$, $\text{Ax}(\beta)$, and since $]x, y[$ meets no translation axis of α nor β , and according to Lemma 3.1.5, the total curvature of $[w', x]$ at the side of $\text{Ax}(\alpha)$ containing T is at most $-\pi$, and, if we denote by θ_1 and θ_2 the interior angles of T at w' and t_1 , according to the Gauss-Bonnet formula applied to T , we should have

$$2\pi \leq \pi - \theta_1 + \pi - \theta_2 + \pi - \frac{\pi}{2} - \pi < \frac{3\pi}{2},$$

a contradiction. Hence, we have $d(w', x) \leq \ell(\alpha)$ and since x is the orthogonal projection of t_1 on $\text{Ax}(\alpha)$, we have $d(w', t_1) \geq d(x, t_1)$. If $t_1 = x$, then $w' = x$, and $d(w', t_1) = d(x, t_1)$. Similarly, we have $d(z', t_2) \geq d(y, t_2)$ and $d(z', y) \leq \ell(\beta)$. Hence, we have, as wanted,

$$\begin{aligned} d(z, w) &= d(z, z') + d(z', t_2) + d(t_2, t_1) + d(t_1, w') + d(w', w) \\ &\geq d(z, y) - \ell(\beta) + d(w, x) - \ell(\alpha) + d(x, y). \end{aligned}$$

Finally, assume that $[w, z]$ is disjoint from $[x, y]$. Then, by an argument similar to the one above, we have $d(z', y) \leq \ell(\alpha)$ and $d(w', x) \leq \ell(\beta)$. Hence, we have, as wanted

$$\begin{aligned} d(z, w) &= d(z, z') + d(z', w') + d(w', w) \\ &\geq d(z, y) - \ell(\beta) + d(w, x) - \ell(\alpha) + d(x, y). \end{aligned}$$

□

3.2 Subsurface with geodesic boundary or filled up by simple closed curves

In this Section 3.2, we assume that Σ is a (possibly trivial) cover of a compact surface whose Euler characteristic is negative. Let $p : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ be a universal cover with covering group Γ .

3.2.1 Subsurface filled up by a set of (free) homotopy classes of simple closed curves or by a measured hyperbolic lamination.

Assume in this Section 3.2.1 that Σ has the homotopy type of a compact surface. A *tight subsurface* of Σ is a closed subsurface Σ' of Σ with piecewise smooth boundary, such that :

- no connected component of Σ' is a disk or a pair of pants ;
- no connected component of $\Sigma - \Sigma'$ is a disk or a cylinder homotopic to a boundary component of Σ ;
- no cylinder connected component of Σ' can be homotoped in another connected component of Σ' .

If C is a closed subset of Σ , an essential closed curve α of Σ *topologically cuts* C if it is not freely homotopic to a curve disjoint from C . Let S be a subset of $\mathcal{S}(\Sigma)$.

Lemma 3.2.1 *There exists a (non unique) tight subsurface W of Σ such that :*

- *Every essential closed curve of Σ that topologically cuts W has a positive intersection number with at least one element of S ;*
- *W contains a representative of each element of S .*

Proof. If Σ is a cylinder or a pair of pants, then $\mathcal{S}(\Sigma) = \emptyset$. If Σ is a torus, then we can take W equal to a cylinder if S has only one element, and $W = \Sigma$ otherwise. Then, we can assume that $\chi(\Sigma) < 0$, hence there exists a (complete) hyperbolic metric (with geodesic boundary) on Σ . Since $S \subseteq \mathcal{S}(\Sigma)$ is at most countable, we can enumerate S as a sequence $([\alpha_k])_{k \in I}$, with I an initial segment of \mathbb{N} . For every $k \in I$, we denote by α_k the geodesic representative of the isotopy class $[\alpha_k]$ for a fixed complete hyperbolic metric with geodesic boundary. We build a sequence of subsurfaces $(W_k)_{k \in I}$ by induction : Let W_0 be a tubular neighborhood of α_0 embedded in Σ . Then, W_0 is a tight subsurface filled up by $[\alpha_0]$.

Let $n \in \mathbb{N}$ such that $n + 1 \in I$. Assume that we have built a tight subsurface W_n filled up by $([\alpha_k])_{0 \leq k \leq n}$. If there exists a representative of $[\alpha_{n+1}]$ contained in W_n , we set $W_{n+1} = W_n$.

Otherwise, up to isotopying α_{n+1} and W_n , there exists a tubular neighborhood T_{n+1} of α_{n+1} embedded into Σ that is small enough so that its boundary components are in minimal position with

the boundary components of W_n (in particular, T_{n+1} is disjoint from the connected components of W_n that are not topologically cut by α_{n+1}). Let $W'_{n+1} = W_n \cup T_{n+1}$ and W_{n+1} be the union of W'_{n+1} with the connected components of $\Sigma - W'_{n+1}$ that are disks or annuli homotopic to a boundary component of Σ , or to a cylinder component of W'_{n+1} . Then W_{n+1} is a tight subsurface of Σ that contains representatives of each homotopy class $[\alpha_k]$ with $k \leq n+1$. Moreover, an essential closed curve β of Σ topologically cuts W_{n+1} if and only if it topologically cuts W'_{n+1} , and since W'_{n+1} retracts onto $W_n \cup \alpha_{n+1}$ by strong deformation, if the intersection number $i(\beta, \alpha_{n+1})$ is zero, then β topologically cuts W_n and by the induction hypothesis, there exists $k \leq n$ such that $i(\beta, \alpha_k) > 0$. In both cases, the surface W_{n+1} satisfies the two assertions of Lemma 3.2.1 for $S = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1}\}$.

The sequence $(W_n)_{n \in I}$ is non decreasing (for the inclusion). For all $n \in I$, we have $\chi(W_n) \geq \chi(\Sigma)$. Besides, if $n+1 \in I$ and $W_n \neq W_{n+1}$, then $\chi(W_{n+1}) < \chi(W_n)$. Hence, there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that the sequence is constant for $n \geq n_0$ and $n \in I$. Then $W = W_{n_0}$ satisfies the two assertions of Lemma 3.2.1. \square

Remark. The tight subsurface W may be nonconnected. The proof shows that there always exists a finite subset $S' \subseteq S$ that fills up W .

Lemma 3.2.2 *Let S and S' be two subsets of $\mathcal{S}(\Sigma)$ such that $S' \subseteq S$. If S and S' fill up respectively W and W' then, up to isotopy, we have $W' \subseteq W$.*

Proof. Assume for a contradiction that a boundary component β of W topologically cuts W' . Then, there exists $\alpha \in S'$ such that $i(\alpha, \beta) > 0$. However, since $S' \subseteq S$, the subsurface W contains a representative of α , hence $i(\alpha, \beta) = 0$, a contradiction. Hence, if β is a boundary component of W , there exists an isotopy of Σ sending β to a closed curve β' disjoint from W' . We can cut Σ along β' and repeat this operation with another boundary component of (the image of) W in the obtained surface. Proceeding by induction, we divide the surface Σ between two surfaces, such that one is homeomorphic to W and the other one is homeomorphic to the closure of $\Sigma - W$, and (the image of) any connected component of W' is contained in one of them. Hence, any connected component of W' is isotopic to a subsurface either contained in W or disjoint from W .

Assume for a contradiction that there exists a connected component C of W' that cannot be homotoped into W . Then, there exists a closed curve α (possibly not simple) contained in $\Sigma - W$ that topologically cuts W' . Hence there exists $\beta \in S'$ such that $i(\alpha, \beta) > 0$. However β belongs to S , and so is homotopic to a closed curve contained in W , and we should have $i(\alpha, \beta) = 0$, a contradiction. Hence, there is no connected component of W' that cannot be homotoped to a subsurface contained in W . \square

Corollary 3.2.3 *Assume that S fills up two subsurfaces W and W' . Then W and W' are isotopic.*

Proof. According to Lemma 3.2.2, up to isotopy, we may assume that W' is contained in the interior of W .

Assume for a contradiction that there exists a connected component C of $W - W'$ that cannot be homotoped into W' . Then, there exists a homotopy class of essential closed curves β with a representative in $\Sigma - W'$, such that β cuts C . Hence, there exists $\alpha \in S$ such that $i(\alpha, \beta) > 0$, but since β has a representative contained in W' , we should have $i(\alpha, \beta) = 0$, a contradiction. Hence, the subsurfaces W' and W are isotopic. \square

The subsurface W , which is unique up to isotopy, will be called the *subsurface filled up by S* . Let $[q]$ be a half-translation structure and let m be a (complete) Riemannian metric on Σ . If S is

finite and $\{c[s]\}_{[s] \in S}$ is a set of $[q]$ or m -geodesic representatives of the elements of S , contained in W , then the complement of the union $\bigcup_{[s] \in S} c[s]$ in W is a finite union of disks and (possibly) cylinders that can be homotoped to a boundary component of W . Otherwise, there would exist an essential closed curve α contained in a connected component of $\Sigma - (\bigcup_{[s] \in S} c[s])$, and we would have $i(s, \alpha) = 0$ for all $s \in S$.

Let g and b be the genus and the number of boundary components of Σ . Let $K = (g + 1)(2g + b)(3g + b)$ (this constant is not optimal).

An arc in Σ with endpoints in $\partial\Sigma$ is said to be *essential* if it is not homotopic relatively to its endpoints to an arc contained in $\partial\Sigma$. An essential simple closed curve or simple arc α can be *separating* or *non separating* depending on whether the surface Σ_α obtained by cutting Σ along α is connected or not. If Σ_α is not connected, we denote by Σ_1 and Σ_2 its two components. We recall the following facts :

- If α is a non separating simple closed curve, then $\chi(\Sigma_\alpha) = \chi(\Sigma)$, $g(\Sigma_\alpha) = g(\Sigma) - 1$ and $b(\Sigma_\alpha) = b(\Sigma) + 2$;
- if α is a separating simple closed curve, then $\chi(\Sigma_\alpha) = \chi(\Sigma_1) + \chi(\Sigma_2) = \chi(\Sigma)$, $g(\Sigma_\alpha) = g(\Sigma_1) + g(\Sigma_2) = g(\Sigma)$, and $b(\Sigma_\alpha) = b(\Sigma_1) + b(\Sigma_2) = b(\Sigma) + 2$;
- if α is a simple arc connecting two distinct boundary components, then $\chi(\Sigma_\alpha) = \chi(\Sigma) + 1$, $g(\Sigma_\alpha) = g(\Sigma)$, and $b(\Sigma_\alpha) = b(\Sigma) - 1$;
- if α is a non separating simple arc with endpoints in the same boundary component, then $\chi(\Sigma_\alpha) = \chi(\Sigma) + 1$, $g(\Sigma_\alpha) = g(\Sigma) - 1$, and $b(\Sigma_\alpha) = b(\Sigma) + 1$;
- if α is a separating simple arc with endpoints in the same boundary component, then $\chi(\Sigma_\alpha) = \chi(\Sigma_1) + \chi(\Sigma_2) = \chi(\Sigma) + 1$, $g(\Sigma_\alpha) = g(\Sigma_1) + g(\Sigma_2) = g(\Sigma)$, and $b(\Sigma_\alpha) = b(\Sigma_1) + b(\Sigma_2) = b(\Sigma) + 1$;
- if α is a simple arc homotopic relatively to its endpoints to the boundary, then the components of Σ_α are respectively a disk and a surface homeomorphic to Σ .

Lemma 3.2.4 *Let W be a tight subsurface filled up by a subset S of $\mathcal{S}(\Sigma)$. Then there exists a subset $S' \subseteq S$ with at most K elements that fills up W .*

Proof. We endow W with a (complete) hyperbolic metric with geodesic boundary, and we identify every element of S with its geodesic representative. Each time we cut a metric surface, we endow the obtained surface with the induced metric. Moreover, every element $s \in S$ defines a closed geodesic, an arc or a union of arcs (possibly contained in the boundary) in any surface W' obtained by cutting W finitely many times. We will still denote it by s , and we will say that we cut W' along s if we cut W' along the simple closed geodesic, the arc or each component of the union of arcs defined by s in W' . In this proof only, we call *trivial component* of a surface a connected component which is a disk or a cylinder.

Since S fills up W , if C is a non trivial connected component of a surface obtained by cutting W finitely many times, then there exists at least one element of S whose image in C has a connected component which is essential. Otherwise, there would exist an essential closed curve in C that would have a null intersection number with any element of S .

We define a finite sequence of surfaces without trivial component $(W_k)_{k \in I}$, with $I = \{0, \dots, n\}$, by cutting W as follows. First, $W_0 = W$. Then, if W_k is defined for some $k \geq 0$, we choose an element $s \in S$ whose intersection with W_k has a connected component which is essential, and we cut W_k along s . Then, we define W_{k+1} to be the union of its non trivial connected components, and we terminate when $W_{k+1} = \emptyset$.

Let us prove that this construction does terminate in a finite time. To every surface W_k of this sequence, we associate the triple $T(k) = (-\chi(W_k), g_k, -\chi(W) - c_k)$, where g_k is the total genus of W_k and c_k is the number of connected components of W_k . The Euler characteristic of a disk or a cylinder is not negative. Hence, for every k , we have $\chi(W) \leq \chi(W_k) \leq 0$, and since the Euler characteristic of any connected component of W_k is at most -1 , we have $0 \leq -\chi(W) - c_k \leq -\chi(W)$. Moreover, for every k , we have $g_k \leq g$, hence the subset $\{T(k)\}_{k \in I}$ of \mathbb{N}^3 has at most $K_1 = (g+1)(|\chi(W)|+1)^2$ elements.

Let us denote by \prec the lexicographical order on \mathbb{N}^3 . For every k such that W_{k+1} is not empty, if W_{k+1} is obtained from W_k :

- by cutting along an essential simple closed geodesic, then $\chi(W_{k+1}) = \chi(W_k)$, but $g_{k+1} < g_k$ if the geodesic is non separating, and $g_{k+1} = g_k$ and $-c_{k+1} < -c_k$ otherwise ;
- by cutting along an essential simple arc, then $-\chi(W_{k+1}) < -\chi(W_k)$;
- by cutting along a union of simple arcs, since at least one is essential, we have $-\chi(W_{k+1}) < -\chi(W_k)$.

Hence, for every $k \geq 0$ such that W_{k+1} is not empty, we have $T(k+1) \prec T(k)$. Hence, $n \leq K_1$. Therefore, there exists $S_1 \subseteq S$ with at most K_1 elements, such that the completion \overline{W}^c (for the induced metric) of $W - \bigcup_{s \in S_1} s$ is a union of disks and cylinders.

Finally, to every cylinder component of \overline{W}^c corresponds two free homotopy class of simple closed curves of W , abstractly defined by the two homotopy classes of simple closed curves contained in the cylinder, which have pairwise disjoint representatives. Since there are at most $3g - 3 + b$ such homotopy classes, there exists $S_2 \subseteq S$ with at most $3g - 3 + b$ elements such that every cylinder components of \overline{W}^c that cannot be homotoped to a boundary component of W is cut by at least one element of S_2 . Finally, the set $S_1 \cup S_2$ has cardinality at most $(3g - 3 + b) + (g+1)(|\chi(W)|+1)^2$ and fills up W . \square

Let m be a complete hyperbolic metric on Σ with geodesic boundary. A *measured hyperbolic lamination* (Λ, μ) of (Σ, m) is a closed subset of Σ which is a disjoint union of simple geodesics, called *leaves*, endowed with a transverse measure. We refer for instance to [Bon2] for the definition of a transverse measure and of the intersection number with (Λ, μ) .

Definition 3.2.1 *A tight subsurface W of Σ is filled up by (Λ, μ) in Σ if Λ is contained in W and if for every essential closed curve β of Σ that topologically cuts W , we have $i((\Lambda, \mu), \beta) > 0$.*

The metric m induces a Riemannian metric on $\Sigma - \Lambda$, and the completion of $\Sigma - \Lambda$ for this metric is a finite union of connected hyperbolic surfaces with geodesic boundary with spikes, abstractly made up of finitely many leaves of Λ (see [Bon2, p. 7]). A boundary component of one of these subsurfaces can be a simple closed geodesic or a finite union of biinfinite geodesics with spikes delimited by two (possibly equal) leaves. For each connected component C of $\Sigma - \Lambda$ whose completion is neither an ideal polygon nor an ideal annulus, we take an annular closed neighborhood U in C of the component of ∂C contained in Λ (possibly with spikes). Let $W(\Lambda)$ be the union of Λ with these neighborhoods U and with the connected components of $\Sigma - \Lambda$ which are ideal polygons or ideal annuli. The tight subsurface $W(\Lambda)$ is filled up by (Λ, μ) . Hence, there exists at least one subsurface filled up by (Λ, μ) .

Lemma 3.2.5 *If (Λ, μ) fills up another subsurface W' in Σ , then W' is isotopic to $W(\Lambda)$.*

Proof. Assume for a contradiction that a boundary component β of $W(\Lambda)$ topologically cuts W' . Then $i(\beta, (\Lambda, \mu)) > 0$, whereas Λ is contained in $W(\Lambda)$, and the curve β does not intersect any leaf of Λ . Hence, every boundary component of $W(\Lambda)$ is freely homotopic to a curve disjoint from W' , and every connected component of W' is isotopic to a subsurface either contained in $W(\Lambda)$ or disjoint from $W(\Lambda)$. The end of the proof is very similar to the proofs of Lemmas 3.2.2 and 3.2.3. \square

Hence, the measured lamination (Λ, μ) fills up a unique tight subsurface up to isotopy, called the *subsurface filled up by* (Λ, μ) . The construction of (a representative of) $W(\Lambda)$ shows that it is connected if and only if Λ is minimal.

3.2.2 Subsurfaces with flat geodesic boundary.

We now discuss some geometric properties of subsurfaces filled up by some set of (homotopy classes of) simple closed curves. Let $[q]$ be a half-translation structure on Σ . Let D be an open disk embedded in Σ with piecewise smooth boundary. The *perimeter* $\text{peri}(D)$ of D is the length of the boundary of the completion of D for the induced metric.

Lemma 3.2.6 *The diameter of D is at most $\text{peri}(D)$ and the area of D is at most $\frac{1}{4\pi} \text{peri}(D)^2$.*

Proof. Let \tilde{D} be a lift of D in $\tilde{\Sigma}$, and let \tilde{D}^c be its completion for the induced metric. If x and y are two points of \tilde{D} , since $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ is CAT(0), there exists a unique geodesic segment between x and y that can be extended (in a possibly non unique way) in a geodesic segment $[x', y']$ whose endpoints belong to the boundary of \tilde{D}^c . Then $d(x, y) \leq d(x', y') \leq \text{length}(\partial \tilde{D}^c)$. Hence, the diameter of \tilde{D} is at most its perimeter, and since $p : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ does not increase the distance and the perimeter of D is equal to the perimeter of \tilde{D} , the diameter of D is at most its perimeter. Moreover, by the isoperimetric inequality the area of \tilde{D} is at most the area of the Euclidean disk of equal perimeter (see [BH, Prop.2.16 p.425]) and p does not increase the area (see [BH, Prop. 2.15 p.426]), hence $\text{Area}(D) \leq \frac{1}{4\pi} \text{peri}(D)^2$. \square

If α is an isotopy class of simple closed curves, let $C(\alpha)$ be the (possibly degenerated) flat cylinder union of all the geodesic representatives of α . If c is a piecewise smooth simple closed curve in α , disjoint from $C(\alpha)$, let $b(\alpha, c)$ be the boundary component of $C(\alpha)$ such that $b(\alpha, c)$ and c bound a cylinder disjoint from the interior of $C(\alpha)$ ($b(\alpha, c)$ is unique since Σ is not a torus).

Lemma 3.2.7 *We have $d(c, b(\alpha, c)) \leq \text{length}(c)$.*

Proof. Let $\tilde{b}(\alpha, c)$ be a (biinfinite) lift of $b(\alpha, c)$ in $\tilde{\Sigma}$. Let γ be a generator of the stabilizer of $\tilde{b}(\alpha, c)$ in Γ . There exists a lift $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow \tilde{\Sigma}$ of c such that $\tilde{c}(1) = \gamma \tilde{c}(0)$. By the assumptions on $b(\alpha, c)$ and c , the geodesic $\tilde{b}(\alpha, c)$ and the point $\tilde{c}(0)$ satisfies the hypothesis of Lemma 3.1.6, hence $d(\tilde{c}(0), \tilde{b}(\alpha, c)) \leq d(\tilde{c}(0), \gamma \tilde{c}(0)) \leq \text{length}(c)$, and since p does not increase the distance, $d(c, b(\alpha, c)) \leq \text{length}(c)$. \square

The following notion of geometric realization of surfaces is due to [Raf, §2]. It generalizes the notion of geometric realization of a surface for a hyperbolic metric. Let W be a non trivial π_1 -injective connected subsurface of Σ . If m is a complete hyperbolic metric on Σ , there exists a unique complementary connected component of the union of the m -geodesic representatives of the boundary components of W , which is isotopic to W . The m -geodesic realization of W is the union of this connected complementary component with the m -geodesic representatives of the boundary

components of W . This no longer works if the metric is a half-translation structure since then the geodesic representatives of the boundary components are not necessarily simple nor pairwise disjoint. We use another construction.

The fundamental group $\pi_1(W)$ (with respect to any choice of basepoint in W) is a subgroup of Γ , that is determined by the homotopy class of W , up to conjugation.

Let $\widehat{p} : \Sigma_W = \widetilde{\Sigma}/\pi_1(W) \rightarrow \Sigma$ be the W -cover of Σ , and let $p' : \widetilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma_W$ be the unique universal cover such that $p = \widehat{p} \circ p'$. Let $[\widehat{q}]$ and $[\widetilde{q}]$ be the pullbacks of $[q]$ on Σ_W and on $\widetilde{\Sigma}$. The surface Σ_W is homotopically equivalent to W , and the preimage $\widehat{p}^{-1}(W)$ has a unique connected component \widehat{W} that is not simply connected. The map $\widehat{p}_{\widehat{W}} : \widehat{W} \rightarrow W$ is a homeomorphism and the complement of \widehat{W} in Σ_W is a finite union of open annuli that can be homotoped to boundary components of \widehat{W} . A *generalized subsurface* is a closed connected union of a (possibly empty) subsurface with some finite connected (metric) graphs, glued at some points of the boundary of the subsurface. Its *boundary* is the union of the boundary of this subsurface with these graphs. If \widehat{W} is not a cylinder, the $[\widehat{q}]$ -geometric realization of \widehat{W} is the unique generalized subsurface $\widehat{W}_{[\widehat{q}]}$ of Σ_W homotopic to \widehat{W} within Σ_W , whose boundary is the union of some $[\widehat{q}]$ -geodesic representatives of the boundary components of \widehat{W} (see [Raf, p. 188]), that contains a unique $[\widehat{q}]$ -geodesic representative of each boundary component of \widehat{W} . We call *boundary components of $\widehat{W}_{[\widehat{q}]}$* the $[\widehat{q}]$ -geodesic representatives of the boundary components of \widehat{W} contained in $\widehat{W}_{[\widehat{q}]}$, and we say that a boundary component of $\widehat{W}_{[\widehat{q}]}$ *corresponds to* a boundary component of \widehat{W} if they are freely homotopic. If \widehat{W} is a cylinder, the $[\widehat{q}]$ -geometric realization of \widehat{W} is the (possibly degenerated) flat cylinder, union of all the $[\widehat{q}]$ -geodesic representatives of the boundary components of \widehat{W} . For every essential homotopy class of closed curves α of \widehat{W} , the $[\widehat{q}]$ -geodesic representatives of α are contained in $\widehat{W}_{[\widehat{q}]}$.

Similarly, if \widetilde{W} is a connected component of the preimage of W in $\widetilde{\Sigma}$, the $[\widetilde{q}]$ -geodesics having the same pair of points at infinity than the boundary components of \widetilde{W} may not be pairwise disjoint. However, there exists a (possibly non unique) generalized subsurface properly homotopic to \widetilde{W} within $\widetilde{\Sigma}$ whose boundary is the union of some geodesics having the same pairs of points at infinity than the boundary components of \widetilde{W} . If \widetilde{W} is not a strip, we call $[\widetilde{q}]$ -geometric realization of \widetilde{W} the unique such generalized subsurface $\widetilde{W}_{[\widetilde{q}]}$ that contains a unique $[\widetilde{q}]$ -geodesic representative of each boundary component of \widetilde{W} , and we call *boundary components of $\widetilde{W}_{[\widetilde{q}]}$* the $[\widetilde{q}]$ -geodesic representatives of the boundary components of \widetilde{W} contained in $\widetilde{W}_{[\widetilde{q}]}$. We say that a boundary component of $\widetilde{W}_{[\widetilde{q}]}$ *corresponds to* a boundary component of \widetilde{W} if they have the same ordered pair of points at infinity. If \widetilde{W} is a strip, we call $[\widetilde{q}]$ -geometric realization of \widetilde{W} the (possibly degenerated) flat strip, union of all the $[\widetilde{q}]$ -geodesics having the same (unordered) pair of points at infinity than the boundary components of \widetilde{W} .

We denote by $\text{Sing}(\widetilde{W}_{[\widetilde{q}]})$ the set of singular points of $[\widetilde{q}]$ contained in $\widetilde{W}_{[\widetilde{q}]}$.

Lemma 3.2.8 *The space $\widetilde{W}_{[\widetilde{q}]}$ is convex. Moreover, for all $\varepsilon > 0$, if the union $\text{Sing}(\widetilde{W}_{[\widetilde{q}]}) \cup \partial\widetilde{W}_{[\widetilde{q}]}$ is ε -dense into $\widetilde{W}_{[\widetilde{q}]}$, then $\widetilde{W}_{[\widetilde{q}]}$ is 2ε -hyperbolic.*

Proof. The proof is essentially the same as the one of [Dan, Prop. 3.7]. It suffices to replace $\rho = \sup_{x \in \Sigma} d(x, \text{Sing}(\Sigma))$ by $\rho = \sup_{x \in \widetilde{W}_{[\widetilde{q}]}} d(x, \text{Sing}(\widetilde{W}_{[\widetilde{q}]}) \cup \partial\widetilde{W}_{[\widetilde{q}]})$. \square

Remark. If the diameter $\text{Diam}(\Sigma, [q])$ is finite, the universal cover $(\widetilde{\Sigma}, [\widetilde{q}])$ is $2 \text{Diam}(\Sigma, [q])$ -hyperbolic.

Assume that \widehat{W} is neither a cylinder nor a pair of pants, and that \widehat{W} is filled up by a finite set of isotopy classes of simple closed curves $S(\widehat{W})$ of cardinality at most K . We can always assume that $S(\widehat{W})$ does not contain the homotopy class of any boundary component of \widehat{W} . Let $\varepsilon = \max_{\alpha \in S(\widehat{W})} \ell_{[q]}(\alpha)$ and let b be the number of boundary components of \widehat{W} .

Lemma 3.2.9 *The length of any boundary component of $\widehat{W}_{[\widetilde{q}]}$ is at most $K\varepsilon$, the diameter of $\widehat{W}_{[\widetilde{q}]}$ is at most $11K\varepsilon$ and its area is at most $\frac{1}{\pi}(1 + 2b)^2(K\varepsilon)^2$.*

Proof. For every $\alpha \in S(\widehat{W})$, let $g(\alpha)$ be the $[\widetilde{q}]$ -geodesic representative of α at the middle of the (possibly degenerated) flat cylinder union of all the geodesic representatives of α . Since $S(\widehat{W})$ fills up \widehat{W} and does not contain the homotopy class of any boundary component of \widehat{W} , the union $G = \bigcup_{\alpha \in S(\widehat{W})} g(\alpha)$ is a connected graph in $\widehat{W}_{[\widetilde{q}]}$ whose sum of the lengths of the edges is at most $K\varepsilon$. Moreover, the connected components of $\widehat{W}_{[\widetilde{q}]} - G$ in $\widehat{W}_{[\widetilde{q}]}$ are disks and possibly cylinders that can be homotoped to a boundary component of $\widehat{W}_{[\widetilde{q}]}$. For each boundary component β of $\widehat{W}_{[\widetilde{q}]}$, the graph G contains a loop of length at most $K\varepsilon$ that is freely homotopic to β . Hence, we have $\ell_{[\widetilde{q}]}(\beta) \leq K\varepsilon$.

If D is an open disk of $\widehat{W}_{[\widetilde{q}]} - G$, the boundary of its completion (for the induced metric) is abstractly contained in G or in the union of G with a boundary component b of $\widehat{W}_{[\widetilde{q}]}$ (if G meets $\partial\widehat{W}_{[\widetilde{q}]}$), hence its perimeter is at most $2K\varepsilon$ or $2K\varepsilon + \ell_{[\widetilde{q}]}(b) \leq 3K\varepsilon$ and according to Lemma 3.2.6, its diameter is at most $3K\varepsilon$. If B is a connected component of $\widehat{W}_{[\widetilde{q}]} - G$ which is a cylinder homotopic to a boundary component β of $\widehat{W}_{[\widetilde{q}]}$, let B^c be the completion of B for the induced metric. Then, one of the boundary component of B^c maps onto β and the other one, denoted by c , maps into G and has length at most $K\varepsilon$. Since $\widehat{W}_{[\widetilde{q}]}$ is disjoint from the interior of the (possibly degenerated) flat cylinder union of all the $[\widetilde{q}]$ -geodesic representatives of β , according to Lemma 3.2.7, there exists a geodesic segment $[x, y]$ between c and β , of length at most $K\varepsilon$, and $B^c - [x, y]$ is a disk of perimeter at most $5K\varepsilon$, and, according to Lemma 3.2.6, of diameter at most $5K\varepsilon$. Hence, for any pair of points of $\widehat{W}_{[\widetilde{q}]}$, there exists a path joining them which is the union of two paths that join the points to G , of lengths at most $5K\varepsilon$, and of a path contained in G , of length at most $K\varepsilon$. Hence the diameter of $\widehat{W}_{[\widetilde{q}]}$ is at most $11K\varepsilon$.

Finally, each edge of the graph G can bound at most two complementary disks of G in $\widehat{W}_{[\widetilde{q}]}$ or appear (abstractly) two times in the boundary of a complementary disk, and an edge of $\partial\widehat{W}_{[\widetilde{q}]}$ at most one. Hence, the sum of the perimeter of the complementary disks is at most two times the sum of the lengths of the edges of G plus the sum of the edges of the boundary of $\widehat{W}_{[\widetilde{q}]}$. According to Lemma 3.2.6, the sum $\sum_D \text{Area}_{[\widetilde{q}]}(D)$, where D are the complementary disks of G , satisfies

$$\sum_D \text{Area}_{[\widetilde{q}]}(D) \leq \sum_D \frac{1}{4\pi} \text{peri}(D)^2 \leq \frac{1}{4\pi} \left(\sum_D \text{peri}(D) \right)^2 \leq \frac{1}{4\pi} (2K\varepsilon + bK\varepsilon)^2$$

If there exists a complementary component which is a cylinder, as seen above, one may cut it open along an arc and get a disk of perimeter at most $5K\varepsilon$, hence of area at most $\frac{25}{4\pi}(K\varepsilon)^2$. Hence, since

$b \leq b^2$, we have

$$\begin{aligned} \text{Area}_{[\widehat{q}]}(\widehat{W}_{[\widehat{q}]}) &\leq \frac{1}{4\pi}(((2+b)K\varepsilon)^2 + 25b(K\varepsilon)^2) \leq \frac{1}{4\pi}(4 + 29b + b^2)(K\varepsilon)^2 \\ &\leq \frac{1}{4\pi}(4 + 16b + 16b^2)(K\varepsilon)^2 \leq \frac{(1+2b)^2}{\pi}(K\varepsilon)^2. \end{aligned}$$

□

3.3 Ultralimits of sequences of metric spaces.

The ultralimit of a sequence of metric spaces is a notion introduced by M. Gromov (see for example [Dru]). It uses ultrafilters (introduced by H. Cartan) that are a way of picking an accumulation value of a sequence in a compact metrizable space, avoiding extraction arguments. Let ω be a non principal ultrafilter on \mathbb{N} (see [Bou, § 6.4]). We say that a sentence $A(n)$ is true for ω -almost all $n \in \mathbb{N}$ if there exists $I \in \omega$ such that $A(n)$ is true for all $n \in I$. If $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a sequence of a topological space E and $a \in E$, we say that the sequence $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ω -converges to a , and write $\lim_{\omega} a_n = a$, if for every neighborhood V of a , the element a_n belongs to V for ω -almost all $n \in \mathbb{N}$. The \lim_{ω} satisfies the usual properties of limits. If E is compact, for example if $E = [-\infty, +\infty]$, for every non principal ultrafilter ω and for every sequence $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E , there exists a unique accumulation value a of $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E such that $\lim_{\omega} a_n = a$.

Let $(X_n, d_n, \star_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of pointed metric spaces endowed with an isometric action of a group Γ . Let

$$X'_{\omega} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n : \lim_{\omega} d_n(x_n, \star_n) < +\infty\}.$$

Then, the function $d'_{\omega} : X'_{\omega} \times X'_{\omega} \rightarrow \mathbb{R}^+$ defined by

$$d'_{\omega}((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \lim_{\omega} d_n(x_n, y_n)$$

is a pseudo-distance on X'_{ω} . We denote by X_{ω} the quotient of X'_{ω} by the equivalence relation $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ if $d'_{\omega}((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = 0$, and the equivalence class of an element $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of X'_{ω} is denoted by $[x_n]_{n \in \mathbb{N}}$. Then, the pseudo-distance d'_{ω} induces a distance d_{ω} on X_{ω} . If for ω -almost all $n \in \mathbb{N}$, F_n is a subset of X_n , let $[F_n]_{n \in \mathbb{N}} = \{[x_n]_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in F_n \text{ for } \omega\text{-all } n \in \mathbb{N} \text{ such that } F_n \text{ exists}\}$. The diagonal action of Γ on $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ is said to be *admissible* if $\lim_{\omega} d_n(\star_n, \gamma \star_n) < +\infty$ for every $\gamma \in \Gamma$. Then, the action $\Gamma \times X_{\omega} \rightarrow X_{\omega}$ defined by $\gamma[x_n]_{n \in \mathbb{N}} = [\gamma x_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is an isometric action on X_{ω} . Let $\star_{\omega} = [\star_n]_{n \in \mathbb{N}}$. The pointed metric space $(X_{\omega}, d_{\omega}, \star_{\omega})$ is called the *ultralimit* of $(X_n, d_n, \star_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for ω and is denoted by $\lim_{\omega} (X_n, d_n, \star_n)$. We recall a few properties of ultralimits of metric spaces :

- If for all $n \in \mathbb{N}$, (X_n, d_n, \star_n) is a geodesic metric space, so is $(X_{\omega}, d_{\omega}, \star_{\omega})$;
- If for all $n \in \mathbb{N}$, (X_n, d_n, \star_n) is CAT(0), so is $(X_{\omega}, d_{\omega}, \star_{\omega})$;
- If for all $n \in \mathbb{N}$, (X_n, d_n, \star_n) is δ_n -hyperbolic in the sense of Gromov, and $\lim_{\omega} \delta_n = \delta$, then $(X_{\omega}, d_{\omega}, \star_{\omega})$ is δ -hyperbolic.

Let $(X_n, d_n, \star_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of CAT(0) pointed metric spaces with an admissible isometric action of Γ , and let $\gamma \in \Gamma$. If γ is hyperbolic in X_n , and $\text{Ax}_{X_n}(\gamma)$ is a translation axis of γ in X_n for ω -almost all $n \in \mathbb{N}$, and if $\lim_{\omega} d_n(\star_n, \text{Ax}_{X_n}(\gamma)) < +\infty$, then $[\text{Ax}_{X_n}(\gamma)]_{n \in \mathbb{N}}$ is a translation axis of γ in X_{ω} if $\ell_{X_{\omega}}(\gamma) > 0$, and it is contained in the set of fixed points of γ in X_{ω} if $\ell_{X_{\omega}}(\gamma) = 0$. If γ is elliptic

in X_n , and $x_n(\gamma)$ is a fixed point of γ in X_n for ω -almost all $n \in \mathbb{N}$, and if $\lim_{\omega} d_n(\star_n, x_n(\gamma)) < +\infty$, then $[x_n(\gamma)]_{n \in \mathbb{N}}$ is a fixed point of γ in X_{ω} . In the two cases, we have $\ell_{X_{\omega}}(\gamma) = \lim_{\omega} \ell_{X_n}(\gamma)$.

Remark. The ultralimit X_{ω} does not change if we choose another sequence of base points $(\star'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, as soon as $\lim_{\omega} d_n(\star_n, \star'_n) < +\infty$. The choice of the base points will not always be specified.

3.4 Ultralimits of sequences of half-translation structures.

Let Σ be a compact, connected, orientable surface, such that $\chi(\Sigma) < 0$, and let $p : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ be a universal cover with covering group Γ . We assume that the boundary of Σ is empty, to simplify the writing of the article, but the results can be extended very easily to a surface with non empty boundary. Let $\text{Flat}(\Sigma)$ be the set of isotopy classes of half-translation structures on Σ , and let $\text{Flat}^1(\Sigma)$ be the set of isotopy classes of half-translation structures on Σ with area 1. Let $([q'_n])_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence in $\text{Flat}(\Sigma)$ and, for all $n \in \mathbb{N}$, let $[\tilde{q}'_n]$ be the pullback of $[q'_n]$ on $\tilde{\Sigma}$. Let ω be a non principal ultrafilter on \mathbb{N} as in Section 3.3.

Let S be a finite generating set of Γ . For all $n \in \mathbb{N}$, define $f_n : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}^+$ by $f_n(x) = \max_{s \in S} d'_n(x, sx)$. Let $\lambda_n = \inf_{x \in \tilde{\Sigma}} f_n(x)$ and let us choose a point $\star_n \in \tilde{\Sigma}$ such that $f_n(\star_n) \leq \lambda_n + 1$. Let $[q_n] = \frac{1}{\lambda_n} [q'_n]$, and let d_n be the distance defined by $[q_n]$ on $\tilde{\Sigma}$.

For all $\gamma \in \Gamma$, we have $\lim_{\omega} d_n(\star_n, \gamma \star_n) < +\infty$, hence $\lim_{\omega} (\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n], \star_n)$ is endowed with an isometric action of Γ . Moreover, if $[x_n]_{n \in \mathbb{N}} \in \lim_{\omega} (\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n], \star_n)$, there exists $s \in S$ such that $d_n(x_n, sx_n) \geq 1$ for ω -almost all $n \in \mathbb{N}$, hence this action has no global fixed point.

Remark 3.4.1 For all $\gamma \in \Gamma - \{e\}$ and $n \in \mathbb{N}$, according to Lemma 3.1.6, if $F_n(\gamma)$ is the flat strip, union of all the translation axes of γ in $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])$, we have $d_n(\star_n, F_n(\gamma)) \leq d_n(\star_n, \gamma \star_n)$. Since the action of Γ on $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])_{n \in \mathbb{N}}$ is admissible, we have $\lim_{\omega} d_n(\star_n, F_n(\gamma)) < +\infty$. Hence, the ultralimit $[F_n(\gamma)]_{n \in \mathbb{N}}$ exists, and $\ell_{\lim_{\omega} (\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])}(\gamma) = \lim_{\omega} \ell_{(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])}(\gamma)$. Moreover, according to Lemma 3.1.6, the set $[F_n(\gamma)]_{n \in \mathbb{N}}$ is exactly the union of the translation axes or the set of fixed points of γ in $\lim_{\omega} (\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])$. Moreover, according to Lemma 3.1.7, if γ_1 and γ_2 are not powers of a common element, then they have at most one common fixed points in $\lim_{\omega} (\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])$.

We will see (Section 3.4.6) that the ultralimit $\lim_{\omega} (\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])$ is a surface endowed with a half-translation structure if and only if there exists $\varepsilon > 0$ such that for every $\alpha \in \mathcal{S}(\Sigma)$ and for ω -almost all $n \in \mathbb{N}$, we have $\ell_{[q_n]}(\alpha) \geq \varepsilon$. In Section 3.4.1, we consider the case where there does not exist such a uniform lower bound on the $[q_n]$ -lengths of the elements of $\mathcal{S}(\Sigma)$. We will notably consider the case where there exist subsurfaces with fixed homotopy type whose boundary components (if any) have their lengths that ω -converge to 0, and whose areas ω -converge to 0. Let us introduce some general definitions. Let m be a hyperbolic metric on Σ , and let \tilde{m} be its pullback on $\tilde{\Sigma}$.

For $i \in \{1, 2, 3\}$, let (x_i, y_i) be an element of $\partial_{\infty}^2 \tilde{\Sigma}$ and let $\tilde{\lambda}_i$ be the geodesic of $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$ whose ordered pair of points at infinity is (x_i, y_i) . We assume that the corresponding unordered pairs of points are pairwise distinct. The pairs (x_1, y_1) and (x_2, y_2) are *interlaced* if the geodesics $\tilde{\lambda}_1$ and $\tilde{\lambda}_2$ intersect each other. If (x_1, y_1) and (x_2, y_2) are not interlaced, the pair (x_3, y_3) is *contained* between (x_1, y_1) and (x_2, y_2) if $\tilde{\lambda}_3$ is contained in the connected component of $\tilde{\Sigma} - \tilde{\lambda}_1 \cup \tilde{\lambda}_2$ bounded by $\tilde{\lambda}_1$ and $\tilde{\lambda}_2$, and the pair (x_3, y_3) is *caught* between (x_1, y_1) and (x_2, y_2) if it is contained between (x_1, y_1) and (x_2, y_2) and if $\tilde{\lambda}_3$ intersects any geodesic segment joining $\tilde{\lambda}_1$ and $\tilde{\lambda}_2$. These definitions do not depend on the choice of m .

If X is an oriented geodesic of $\tilde{\Sigma}$ (for any complete, CAT(0) metric on $\tilde{\Sigma}$) or an element of $\Gamma - \{e\}$, we denote by $E(X) \in \partial_\infty^2 \tilde{\Sigma}$ its ordered pair of points at infinity or of fixed points at infinity. If X , Y and Z are three such elements, we say that X and Y are *interlaced* if $E(X)$ and $E(Y)$ are interlaced and that Z is *caught* or *contained* between X and Y if $E(Z)$ is caught or contained between $E(X)$ and $E(Y)$.

In the remainder of this section, we will consider a tight, connected subsurface W of Σ (possibly equal to Σ). Let $\hat{p}: \Sigma_W \rightarrow \Sigma$ be a W -cover of Σ and let \widehat{W} be the unique connected component of the preimage of W in Σ_W which is not simply connected. Let \widetilde{W} be a connected component of the preimage of W in $\tilde{\Sigma}$. Let $([\hat{q}_n])_{n \in \mathbb{N}}$ and $([\tilde{q}_n])_{n \in \mathbb{N}}$ be the pullbacks of $([q_n])_{n \in \mathbb{N}}$ on Σ_W and on $\tilde{\Sigma}$. For all $n \in \mathbb{N}$, we denote by \widehat{W}_n and \widetilde{W}_n the $[\hat{q}_n]$ and $[\tilde{q}_n]$ -geometric realization of \widehat{W} and of \widetilde{W} .

3.4.1 Typical degenerations.

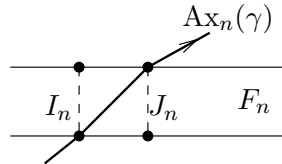
In this subsection, we assume that :

- $\lim_\omega \ell_{[q_n]}(\alpha) = \varepsilon_\alpha < +\infty$, for every $\alpha \in \mathcal{C}(\Sigma)$;
- $\lim_\omega \ell_{[q_n]}(b) = 0$, for every boundary component b of W .

Let \tilde{c} be a boundary component of \widetilde{W} . We denote by $\text{Stab}_\Gamma(\tilde{c})$ the stabilizer of \tilde{c} in Γ and by $\gamma_{\tilde{c}}$ a primitive generator of $\text{Stab}_\Gamma(\tilde{c})$. For all n , let F_n be the (possibly degenerated) flat strip, union of all the geodesic representatives of \tilde{c} . Let γ be a primitive element of $\Gamma - \{e\}$ whose translation axes in any $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])$ are interlaced with \tilde{c} , and let $(\text{Ax}_n(\gamma))_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of translation axes of γ in $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])$.

Lemma 3.4.2 *The geodesic $\text{Ax}_\omega(\gamma) = [\text{Ax}_n(\gamma)]_{n \in \mathbb{N}}$ is the only translation axis or set of fixed points of γ in $\lim_\omega(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])$, and the intersection $\text{Ax}_\omega(\gamma) \cap [F_n(\tilde{c})]_{n \in \mathbb{N}}$ is a geodesic segment orthogonal to the boundary of $[F_n(\tilde{c})]_{n \in \mathbb{N}}$ if $[F_n(\tilde{c})]_{n \in \mathbb{N}}$ is not reduced to a geodesic line, and is reduced to a point otherwise. Moreover, if γ' is another primitive element of $\Gamma - \{e\}$ whose translation axes in any $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])$ are interlaced with \tilde{c} , and if $\text{Ax}_\omega(\gamma')$ is the set of fixed points or a translation axis of γ' in $\lim_\omega(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])$, then $\text{Ax}_\omega(\gamma') \cap [F_n(\tilde{c})]_{n \in \mathbb{N}} = \text{Ax}_\omega(\gamma) \cap [F_n(\tilde{c})]_{n \in \mathbb{N}}$.*

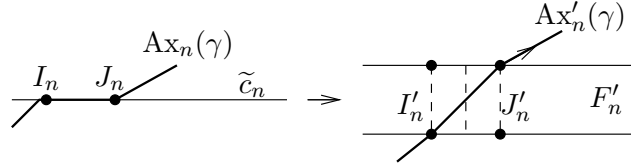
We denote by $\star_{\tilde{c}}$ the unique point of $\text{Ax}_\omega(\gamma) \cap [F_n(\tilde{c})]_{n \in \mathbb{N}}$ that belongs to $[\widetilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$. We will need the following lemma in order to prove Lemma 3.4.2. Let c be the image of \tilde{c} in Σ . Let α_γ be the free homotopy class of closed curves defined by γ in Σ . Let S be a filling finite set of simple closed curves in Σ , such that c does not belong to S . For all $n \in \mathbb{N}$, we denote by I_n and J_n the geodesic segments in $F_n(\tilde{c})$ perpendicular to its boundary components \tilde{c}_n and \tilde{c}'_n (reduced to two points if $F_n(\tilde{c})$ is reduced to a single geodesic) such that one endpoint of I_n (resp. J_n) is the first (resp. last) intersection point between $\text{Ax}_n(\gamma)$ and $F_n(\tilde{c})$.



Lemma 3.4.3 *We have $d_n(I_n, J_n) \leq \ell_{[q_n]}(c) \sum_{s \in S} i(\alpha_\gamma, s)$.*

Proof. Let $n \in \mathbb{N}$. Assume first that $F_n(\tilde{c})$ is a non degenerated flat strip. Let $\bigcup S$ be the union of some geodesic representatives of the elements of S in $(\Sigma, [q_n])$ (one by element of S). Then, the complementary components of $\bigcup S$ are disks. Let $\bigcup \tilde{S}$ be the preimage of $\bigcup S$ in $\tilde{\Sigma}$. Then, the complementary components of $\bigcup \tilde{S}$ are disks. Hence, the intersection $(\bigcup \tilde{S}) \cap F_n(\tilde{c})$ is a union of Euclidean segments that join the boundary components of $F_n(\tilde{c})$, and the complementary components of $(\bigcup \tilde{S}) \cap F_n(\tilde{c})$ in $F_n(\tilde{c})$ are disks that embed into Σ . Hence, none of these (open) disks contains an entire flat rectangle which is a fundamental domain in $F_n(\tilde{c})$ for the action of $\gamma_{\tilde{c}}^{\mathbb{Z}}$. Hence, if the interval $\text{Ax}_n(\gamma) \cap F_n(\tilde{c})$ crosses entirely $k \in \mathbb{N}$ closures of such rectangles in $F_n(\tilde{c})$, it has at least k transverse intersections with $\bigcup \tilde{S}$, and since it is contained in a fundamental domain of $\text{Ax}_n(\gamma)$ for the action of $\gamma^{\mathbb{Z}}$, we have $\sum_{s \in S} i(\alpha_\gamma, s) \geq k$. Hence, we have $d_n(I_n, J_n) \leq \ell_{[q_n]}(c) \sum_{s \in S} i(\alpha_\gamma, s)$.

Assume next that $F_n(\tilde{c})$ is a single geodesic \tilde{c}_n . Then, we replace all the geodesics of the Γ -orbit of \tilde{c}_n by some flat strips of width 1. Thus, we get a surface $\tilde{\Sigma}'$ endowed with a locally Euclidean metric d'_n with singularities (of angles possibly non multiple of π), which is still CAT(0), and is Γ -equivariantly homotopically equivalent to $(\tilde{\Sigma}, d_n)$. We denote by F'_n the flat strip of width 1 corresponding to \tilde{c}_n .



Let \tilde{S} be a set of geodesic representatives of the lifts of the elements of S in $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])$ (one by element). The connected components of $\tilde{\Sigma} - \Gamma \cdot \tilde{c}_n$ naturally identify with the connected components of $\tilde{\Sigma}' - \Gamma \cdot F'_n$, and the connected components of $\text{Ax}_n(\gamma) - (\Gamma \cdot \tilde{c}_n \cap \text{Ax}_n(\gamma))$ and of $\tilde{s} - (\Gamma \cdot \tilde{c}_n \cap \tilde{s})$, with $\tilde{s} \in \tilde{S}$, embed into $\tilde{\Sigma}'$ by this identification. We get a piecewise geodesic path $\text{Ax}'_n(\gamma)$ and a set \tilde{S}' of piecewise geodesic paths in $(\tilde{\Sigma}', d')$ by joining these connected components which correspond to the same geodesics of $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])$ by the unique Euclidean segments that joins these endpoints, in the added flat strips. By construction, these paths project to periodic curves in Σ , that belong respectively to the free homotopy classes of α_γ and of s , with $s \in S$. Hence, the complementary components of $\bigcup \tilde{S}'$, in $(\tilde{\Sigma}', d'_n)$ are disks, and the complementary components of $(\bigcup \tilde{S}') \cap F'_n$ in F'_n are disks that embed into Σ .

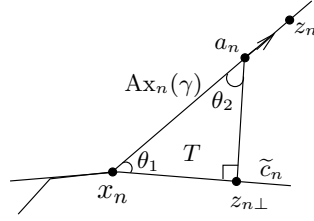
As above, if $\text{Ax}'_n(\gamma)$ crosses entirely $k \in \mathbb{N}$ rectangles that are fundamental domains in F'_n for the action by translations of $\gamma_{\tilde{c}}^{\mathbb{Z}}$, it has at least k transverse intersections with elements of \tilde{S}' . Since the interval $\text{Ax}'_n(\gamma) \cap F'_n$ is strictly contained in a fundamental domain of $\text{Ax}'_n(\gamma)$ for the action of $\gamma^{\mathbb{Z}}$, we have $\sum_{s \in S} i(\alpha_\gamma, s) \geq k$. Moreover, the distance between the orthogonal segments to $F_n(\tilde{c})'$ having as an endpoint respectively the first and the last intersection point of $\text{Ax}'_n(\gamma)$ with $F_n(\tilde{c})'$ is equal to $d_n(I_n, J_n)$. Hence, as above, $d_n(I_n, J_n) \leq \ell_{[q_n]}(c) \sum_{s \in S} i(\alpha_\gamma, s)$. \square

Proof of Lemma 3.4.2. According to Remark 3.4.1 the ultralimit $[\text{Ax}_n(\gamma)]_{n \in \mathbb{N}}$ exists.

Let us first prove that the intersection $\text{Ax}_\omega(\gamma) \cap [F_n(\tilde{c})]_{n \in \mathbb{N}}$ is a geodesic segment orthogonal to the boundary components of $[F_n(\tilde{c})]_{n \in \mathbb{N}}$, if $[F_n(\tilde{c})]_{n \in \mathbb{N}}$ is a flat strip, and is reduced to a point otherwise.

Let I_n and J_n be the segments (possibly reduced to a point) orthogonal to $F_n(\tilde{c})$, having as an endpoint the first and the last intersection point between $\text{Ax}_n(\gamma)$ and $F_n(\tilde{c})$, as in Lemma 3.4.3. Since $\lim_\omega \ell_{[q_n]}(c) = 0$, according to Lemma 3.4.3, we have $\lim_\omega d_n(I_n, J_n) = 0$. For all $n \in \mathbb{N}$, let

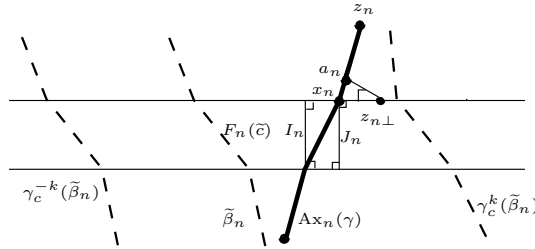
$x_n \in J_n$ be the last intersection point between $F_n(\tilde{c})$ and the oriented geodesic $Ax_n(\gamma)$. Let $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of points such that, for all n , z_n belongs to $[x_n, Ax_n(\gamma)(+\infty)[$, and let $z_{n\perp}$ be the orthogonal projection of z_n onto $F_n(\tilde{c})$. Let \tilde{c}_n be the boundary component of $F_n(\tilde{c})$ containing $z_{n\perp}$ and let $+$ be the side of \tilde{c}_n containing z_n . If $F_n(\tilde{c})$ is not degenerated, its interior is not contained in \tilde{W}_n , whereas the side $+$ contains \tilde{W}_n . Hence, according to Lemma 3.1.5, the total curvature of a fundamental domain of \tilde{c}_n , at the side $+$, is equal to $-p\pi$, with $p \in \mathbb{N}^*$. Let us prove that $d_n(x_n, z_{n\perp}) \leq \ell_{[q_n]}(c)$. Otherwise, $z_{n\perp}$ is not equal to x_n and the open segment $]x_n, z_{n\perp}[$ fully contains an entire fundamental domain of \tilde{c}_n for the action of $\gamma_{\tilde{c}}^{\mathbb{Z}}$. Let a_n be the last intersection point between $[z_n, x_n]$ and $[z_n, z_{n\perp}]$. The curve $[x_n, a_n] \cdot [a_n, z_{n\perp}] \cdot [z_{n\perp}, x_n]$ bounds a topological disk T .



The interior angle at $z_{n\perp}$ is at least $\frac{\pi}{2}$. Let θ_1 and θ_2 be the two other interior angles of the boundary of T which are less than π . By the Gauss-Bonnet formula applied to T , we should have

$$2\pi\chi(T) \leq \pi - \frac{\pi}{2} + \pi - \theta_1 + \pi - \theta_2 - p\pi \leq \frac{3}{2}\pi,$$

a contradiction since $\chi(T) = 1$. Hence, we have $d_n(x_n, z_{n\perp}) \leq \ell_{[q_n]}(c)$, and $d_n(z_n, F_n(\tilde{c})) = d_n(z_n, z_{n\perp}) \geq d_n(z_n, x_n) - \ell_{[q_n]}(c)$. Since $\lim_{\omega} \ell_{[q_n]}(c) = 0$, we deduce that $[z_n]_{n \in \mathbb{N}}$ belongs to $[F_n(\tilde{c})]_{n \in \mathbb{N}}$ if and only if $[z_n]_{n \in \mathbb{N}} = [x_n]_{n \in \mathbb{N}}$. Similarly, for all $n \in \mathbb{N}$, let y_n be the first intersection point between $Ax_n(\gamma)$ and $F_n(\tilde{c})$, and let z_n belongs to $[y_n, Ax_n(\gamma)(-\infty)[$, then $[z_n]_{n \in \mathbb{N}}$ belongs to $[F_n(\tilde{c})]_{n \in \mathbb{N}}$ if and only if $[z_n]_{n \in \mathbb{N}} = [y_n]_{n \in \mathbb{N}}$. Moreover, since the distance between I_n and J_n ω -converges to zero, the intersection between $[Ax_n(\gamma)]_{n \in \mathbb{N}}$ and $[F_n(\tilde{c})]_{n \in \mathbb{N}}$ is a segment orthogonal to the boundary components of $[F_n(\tilde{c})]_{n \in \mathbb{N}}$, possibly reduced to a point if $[F_n(\tilde{c})]_{n \in \mathbb{N}}$ is reduced to a single geodesic.



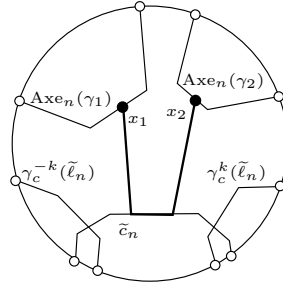
Let $(\tilde{\beta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of translation axes of another primitive element of $\Gamma - \{e\}$ which is interlaced with \tilde{c} , or another sequence of translation axes of γ , and let $n \in \mathbb{N}$. Since the action of $\gamma_{\tilde{c}}^{\mathbb{Z}}$ on $\partial_{\infty} \tilde{\Sigma}$ is a South-North dynamic with fixed points $\tilde{c}(+\infty)$ and $\tilde{c}(-\infty)$, there exists $k \in \mathbb{N}$ such that $Ax_n(\gamma)$ and $\tilde{\beta}_n$ are caught between $\gamma_{\tilde{c}}^k(\tilde{\beta}_n)$ and $\gamma_{\tilde{c}}^{-k}(\tilde{\beta}_n)$. Moreover, the integer k only depends on $E(Ax_n(\gamma))$ and $E(\tilde{\beta}_n)$, hence does not depend on $n \in \mathbb{N}$. Hence, we have $\lim_{\omega} d_n(Ax_n(\gamma) \cap F_n(\tilde{c}), \tilde{\beta}_n \cap F_n(\tilde{c})) \leq \lim_{\omega} 2k \ell_{[q_n]}(c) = 0$, and $[Ax_n(\gamma)]_{n \in \mathbb{N}} \cap [F_n(\tilde{c})]_{n \in \mathbb{N}} = [\tilde{\beta}_n]_{n \in \mathbb{N}} \cap [F_n(\tilde{c})]_{n \in \mathbb{N}}$.

According to Remark 3.4.1, any translation axis or any set of fixed points of an element of $\Gamma - \{e\}$ in $\lim_\omega(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])$ is the ultralimit of a sequence of translation axes of γ in $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])$. Hence, the element γ has no other translation axis or set of fixed points than $\text{Ax}_\omega(\gamma)$, and if $\gamma' \in \Gamma - \{e\}$ is interlaced with \tilde{c} , we have $\text{Ax}_\omega(\gamma) \cap [F_n(\tilde{c})]_{n \in \mathbb{N}} = \text{Ax}_\omega(\gamma') \cap [F_n(\tilde{c})]_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Let $\Gamma_{\tilde{W}}$ be the stabilizer of \tilde{W} in Γ , let γ_1, γ_2 be two (not necessarily distinct) elements of $\Gamma_{\tilde{W}}$ that do not preserve any boundary component of \tilde{W} and let \tilde{c} be a boundary component of \tilde{W} . We assume that γ_1, γ_2 are hyperbolic in $\lim_\omega(\tilde{\Sigma}, d_n, \star_n)_{n \in \mathbb{N}}$. We still denote by $\gamma_{\tilde{c}}$ a primitive generator of $\text{Stab}_{\Gamma_{\tilde{W}}}(\tilde{c})$. For all $n \in \mathbb{N}$, let \tilde{c}_n be the boundary component of \tilde{W}_n corresponding to \tilde{c} .

Lemma 3.4.4 *If $[x_1, x_2]$ is a geodesic segment joining a translation axis of γ_1 to a translation axis of γ_2 in $[\tilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$, then the segment $[x_1, x_2]$ can intersect $[\tilde{c}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ at most at $\star_{\tilde{c}}$. Notably, any translation axis of γ_1 or γ_2 can intersect $[\tilde{c}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ at most at $\star_{\tilde{c}}$.*

Proof. According to Remark 3.4.1, any translation axis of γ_1 (resp. γ_2) in $\lim_\omega(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])$ is the ultralimit of a sequence $(\text{Ax}_n(\gamma_1))_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(\text{Ax}_n(\gamma_2))_{n \in \mathbb{N}}$) of translation axes of γ_1 (resp. γ_2) in $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])$. Then, there exists a sequence $([x_{1,n}, x_{2,n}])_{n \in \mathbb{N}}$ of geodesic segments joining $\text{Ax}_n(\gamma_1)$ to $\text{Ax}_n(\gamma_2)$ such that $[x_1, x_2] = [[x_{1,n}, x_{2,n}]]_{n \in \mathbb{N}}$. Let $\tilde{\ell}_0$ be a geodesic of $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_0])$ that is interlaced with \tilde{c} , and for all $n \in \mathbb{N}$, let $\tilde{\ell}_n$ be a geodesic of $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])$ having the same pair of points at infinity than $\tilde{\ell}_0$. There exists $k \in \mathbb{N}$ such that $\text{Ax}_n(\gamma_1)$ and $\text{Ax}_n(\gamma_2)$ are contained between $\gamma_{\tilde{c}}^{-k}(\tilde{\ell}_n)$ and $\gamma_{\tilde{c}}^k(\tilde{\ell}_n)$, with k independent of n as in the proof of Lemma 3.4.2.



For all $n \in \mathbb{N}$, the union $\text{Ax}_n(\gamma_1) \cup [x_{1,n}, x_{2,n}] \cup \text{Ax}_n(\gamma_2)$ is contained in a connected generalized subsurface of $\tilde{\Sigma}$ whose boundary is contained in $\gamma_{\tilde{c}}^k(\tilde{\ell}_n) \cup \gamma_{\tilde{c}}^{-k}(\tilde{\ell}_n) \cup \tilde{c}_n$. Since we have $[\gamma_{\tilde{c}}^k(\tilde{\ell}_n)]_{n \in \mathbb{N}} \cap [\tilde{c}_n]_{n \in \mathbb{N}} = [\gamma_{\tilde{c}}^{-k}(\tilde{\ell}_n)]_{n \in \mathbb{N}} \cap [\tilde{c}_n]_{n \in \mathbb{N}} = \star_{\tilde{c}}$, we see that $[[x_{1,n}, x_{2,n}]]_{n \in \mathbb{N}}$ can intersect $[\tilde{c}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ at most at $\star_{\tilde{c}}$. \square

Let x be a point of a translation axis of γ_1 in $[\tilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$.

Lemma 3.4.5 *The geodesic segment $[x, \gamma_{\tilde{c}}x]$ intersects $[\tilde{c}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ at $\star_{\tilde{c}}$.*

Proof. This follows from Lemma 3.4.4 using $\gamma_2 = \gamma_{\tilde{c}}\gamma_1\gamma_{\tilde{c}}^{-1}$ and from Remark 3.4.1. \square

In the remainder of this Section 3.4.1, we assume moreover that $\lim_\omega \text{Area}(\tilde{W}_n) = 0$.

We want to determine the ultralimit of the sequence $(\tilde{W}_n, d_n, \star_n)_{n \in \mathbb{N}}$, where d_n is the distance defined by $[\tilde{q}_n]$ and \star_n is any point of \tilde{W}_n in a fixed compact subset of $\tilde{\Sigma}$.

Lemma 3.4.6 *Let $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ be a sequence of pairwise distinct elements of $\mathcal{S}(\widehat{W})$. Then, there exists $\beta \in \mathcal{S}(\widehat{W})$ such that $\lim_\omega i(\beta, \alpha_k) = +\infty$.*

Proof. Let m be a hyperbolic metric with geodesic boundary on \widehat{W} . There exists a finite family S of simple closed geodesics in \widehat{W} such that the complement in \widehat{W} of the union of S is a finite union of disks and cylinders that can be homotoped to some boundary components of \widehat{W} , and there exists $C > 0$ such that the perimeter of any complementary disk or cylinder is at most C . Moreover, for all $A > 0$, there exist at most finitely many elements $\alpha \in \mathcal{S}(\widehat{W})$ such that $\ell_m(\alpha) \leq A$, hence we have $\lim_{\omega} \ell_m(\alpha_n) = +\infty$. If α is a simple locally geodesic arc that joins two points of the boundary of a complementary disk or two points of the same boundary component of a complementary cylinder, then it is homotopic to an arc contained in the boundary, and its length is less than the perimeter of this disk or this cylinder. Hence, if \widehat{g} is an essential simple closed geodesic of \widehat{W} , the length of any segment of intersection between \widehat{g} and a complementary disk or a complementary cylinder is at most C , and since the intersection number between two hyperbolic geodesics is minimal, we have $\ell_m(g) \leq C \sum_{\beta \in S} i(g, \beta)$. Since $\lim_{\omega} \ell_m(\alpha_n) = +\infty$, there exists $\beta \in S$ such that $\lim_{\omega} i(\alpha_n, \beta) = +\infty$. \square

For every $\alpha \in \mathcal{S}(\widehat{W})$, let $h_n(\alpha)$ be the height of the (possibly degenerated) flat cylinder, union of all the $[\widehat{q}_n]$ -geodesic representatives of α , and let $h_\alpha = \lim_{\omega} h_n(\alpha)$. If there existed $\alpha \in \mathcal{S}(\widehat{W})$ such that $h_\alpha = +\infty$, since α is not freely homotopic to a boundary component of \widehat{W} , there would exist $\beta \in \mathcal{C}(\widehat{W})$ such that $i(\alpha, \beta) > 0$, and then we would have $\lim_{\omega} \ell_{[\widehat{q}_n]}(\beta) \geq \lim_{\omega} h_n(\alpha) = +\infty$, which is impossible by hypothesis. Hence, we have $h_\alpha < +\infty$ for all $\alpha \in \mathcal{S}(\widehat{W})$.

Lemma 3.4.7 *The set $S = \{\alpha \in \mathcal{S}(\widehat{W}) : h_\alpha > 0\}$ is finite (possibly empty), and for all $\alpha \in S$, we have $\lim_{\omega} \ell_{[\widehat{q}_n]}(\alpha) = 0$.*

Proof. Let α and β be two elements of S . For all $n \in \mathbb{N}$, we have $h_n(\alpha) \ell_{[\widehat{q}_n]}(\alpha) \leq \text{Area}_{[\widehat{q}_n]}(\widehat{W}_n)$, and since $h_\alpha > 0$, we have $\lim_{\omega} \ell_{[\widehat{q}_n]}(\alpha) \leq \lim_{\omega} \frac{\text{Area}_{[\widehat{q}_n]}(\widehat{W})}{h_n(\alpha)} = 0$, and similarly $\lim_{\omega} \ell_{[\widehat{q}_n]}(\beta) = 0$, which proves the first point. Assume for a contradiction that $i(\alpha, \beta) > 0$. Then, for all $n \in \mathbb{N}$, any $[\widehat{q}_n]$ -geodesic representative of α crosses the flat cylinder, union of all the $[\widehat{q}_n]$ -geodesic representatives of β , hence $\ell_{[\widehat{q}_n]}(\alpha) \geq h_n(\beta)$ and $\lim_{\omega} \ell_{[\widehat{q}_n]}(\alpha) \geq h_\beta > 0$, a contradiction. Hence $i(\alpha, \beta) = 0$, and S is a subset of $\mathcal{S}(\widehat{W})$ whose elements have pairwise disjoint representatives, and so is finite. \square

For all $n \in \mathbb{N}$, let $C_n = \bigcup_{\alpha \in S} C_n(\alpha)$, where $C_n(\alpha)$ is the flat cylinder union of all the $[\widehat{q}_n]$ -geodesic representatives of α . Let $\gamma \in \Gamma_{\widehat{W}}$ be an element associated with an element $\alpha \in S$. For all $n \in \mathbb{N}$, let $F_n(\gamma)$ be the flat strip, union of all the translation axes of γ in \widehat{W}_n . According to Remark 3.4.1, we have $\lim_{\omega} d_n(F_n(\gamma), \star_n) \leq \lim_{\omega} d_n(\star_n, \gamma \star_n) < +\infty$. Moreover, we have $0 < h_\alpha < +\infty$ as seen before Lemma 3.4.7, hence the ultralimit $[F_n(\gamma)]_{n \in \mathbb{N}}$ of the sequence $(F_n(\gamma))_{n \in \mathbb{N}}$ exists and is a flat strip. Since $\lim_{\omega} \ell_{[\widehat{q}_n]}(\gamma) = 0$ and according to Remark 3.4.1, it is the set of fixed point of γ in $[\widehat{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$.

Finally, since the ultralimit of a sequence of flat strips is a flat strip, if it exists, the ultralimit $[\widetilde{C}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is a (possibly uncountable) union of flat strips, with a countable subset of them which are the sets of fixed points of the elements of Γ defined by the elements of S .

Let M be a connected complementary component of the union of simple and pairwise disjoint smooth representatives of the elements of S (one representative by element of S) and let \widetilde{M} be a connected component of the preimage of M in $\widetilde{\Sigma}$. The subsurface M is π_1 -injective. For all $n \in \mathbb{N}$, let \widetilde{M}_n be the $[\widehat{q}_n]$ -geometric realization of \widetilde{M} . It may happen that \widetilde{M}_n is a graph or a generalized subsurface for some or all $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 3.4.8 *The ultralimit $[\widetilde{M}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is an \mathbb{R} -tree $T_{\widetilde{M}}$.*

Proof. Since \widetilde{M}_n is convex for all $n \in \mathbb{N}$, the ultralimit $[\widetilde{M}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is convex. Assume for a contradiction that there exists $\varepsilon > 0$ such that for all $J \in \omega$, there exists $n \in J \cap I(S)$ such that \widetilde{M}_n contains an open disk $D(x_n, \varepsilon)$ of radius $\varepsilon > 0$ that does not contain any singular point. Since $\lim_{\omega} \text{Area}_{[\widehat{q}_n]}(\widehat{W}_n) = 0$, for ω -almost all n , the disk $D(x_n, \frac{\varepsilon}{2})$ does not embed into \widehat{W}_n . According to [Dan, Lem. 4.3], the projection of $D(x_n, \varepsilon)$ in \widehat{W}_n is contained in a flat cylinder of height at least $\varepsilon' = \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon$, hence there exists an isotopy class c_n of essential simple closed curves such that $h_n(c_n) \geq \varepsilon'$. Moreover, c_n is an isotopy class of essential simple closed curves of M . Either there exists $c \in \mathcal{S}(M)$ and $I_c \in \omega$ such that $c_n = c$ for all $n \in I_c \cap I(S)$, or there exists $J \in \omega$ such that for all $n, p \in J$, if $n \neq p$, then $c_n \neq c_p$.

In the first case, we have $\lim_{\omega} h_n(c) \geq \varepsilon'$ and c belongs to S , which is impossible by the definition of M .

In the second case, according to Lemma 3.4.6, there exists $\beta \in \mathcal{S}(\widehat{W})$ such that $\lim_{\omega} i(\beta, c_n) = +\infty$. Then, we have $\lim_{\omega} \ell_{[\widehat{q}_n]}(\beta) \geq \lim_{\omega} i(\beta, c_n) \times h_n(c_n) = +\infty$, which is impossible by hypothesis.

Hence, for all $n \in \mathbb{N}$, the union of $\partial \widetilde{M}_n$ with the set of singular points of $[\widehat{q}_n]$ is ε_n -dense in \widetilde{M}_n , with $\lim_{\omega} \varepsilon_n = 0$. According to Lemma 3.2.8, the convex set $[\widetilde{M}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is 0-hyperbolic, hence it is an \mathbb{R} -tree. \square

Let $\Gamma_{\widetilde{M}}$ be the stabilizer of \widetilde{M} in Γ . If $\Gamma_{\widetilde{M}}$ does not have a global fixed point in $T_{\widetilde{M}}$, let T_{\min} be the *minimal subtree* for the isometric action of $\Gamma_{\widetilde{M}}$ on $T_{\widetilde{M}}$, i.e. the smallest non empty subtree of $T_{\widetilde{M}}$ that is invariant by $\Gamma_{\widetilde{M}}$. It is the union of the translation axes of the hyperbolic elements of $\Gamma_{\widetilde{M}}$. The isometric action of $\Gamma_{\widetilde{M}}$ on T_{\min} is said to have *small edge stabilizers* if $\Gamma_{\widetilde{M}}$ has no global fixed point, all the elements defined by the boundary components of M are elliptic element, and the stabilizers of the non trivial segments are trivial or cyclic.

Lemma 3.4.9 *Either $\Gamma_{\widetilde{M}}$ has a global fixed point in $T_{\widetilde{M}}$ or the isometric action of $\Gamma_{\widetilde{M}}$ on T_{\min} has small edge stabilizers.*

Proof. Assume that $\Gamma_{\widetilde{M}}$ has no global fixed point in $T_{\widetilde{M}}$ so that T_{\min} is well defined. Let $\gamma \in \Gamma_{\widetilde{M}}$ be an element defined by a boundary component b of M . The curve b is either a component of $\partial \widehat{W}$ or belongs to S . In the two cases, we have $\lim_{\omega} \ell_{[\widehat{q}_n]}(b) = 0$, and according to Remark 3.4.1, we have $\ell_{T_{\min}}(\gamma) = \lim_{\omega} \ell_{\widehat{W}_n}(\gamma) = 0$, hence γ is elliptic in T_{\min} .

Let α, β be two elements of $\Gamma_{\widetilde{M}} - \{e\}$ which are not powers of a common element. Let us prove that α and β have at most one common fixed point. For all $n \in \mathbb{N}$, let $\text{Ax}_n(\alpha)$ and $\text{Ax}_n(\beta)$ be two translation axes of α and β in \widetilde{M}_n , that minimize the distance between the translation axes of α and β . Let $[x_n]_{n \in \mathbb{N}}$ and $[y_n]_{n \in \mathbb{N}}$ be fixed points of α and β in T_{\min} . For all $n \in \mathbb{N}$, let $F_n(\alpha)$ be the flat strip union of all the translation axes of α . According to Remark 3.4.1, we have $d_n(x_n, F_n(\alpha)) \leq d_n(x_n, \alpha x_n)$, hence $d_n(x_n, \text{Ax}_n(\alpha)) \leq d_n(x_n, \alpha x_n) + h_n(\alpha)$, where $h_n(\alpha)$ is the height of $F_n(\alpha)$. Since $h_n(\alpha)$ ω -converges to zero, we have $\lim_{\omega} d_n(x_n, \text{Ax}_n(\alpha)) \leq \lim_{\omega} d_n(x_n, \alpha x_n) + \lim_{\omega} h_n(\alpha) = 0$. Hence, we can always assume that x_n belongs to $\text{Ax}_n(\alpha)$ for all n . Similarly, we can always assume that y_n belongs to $\text{Ax}_n(\beta)$ for all n .

Assume that $[x_n]_{n \in \mathbb{N}} = [y_n]_{n \in \mathbb{N}}$. Let $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be two sequences of points such that $[z_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is a fixed point of α and $[w_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is a fixed point of β . As above, we can assume that z_n belongs to $\text{Ax}_n(\alpha)$ and w_n belongs to $\text{Ax}_n(\beta)$ for all $n \in \mathbb{N}$. Since $\lim_{\omega} h_n(\alpha) = \lim_{\omega} h_n(\beta) = 0$, up

to replacing $Ax_n(\alpha)$ and $Ax_n(\beta)$ by others translation axes of α and β , we can always assume that the segment $[w_n, z_n]$ does not intersect a translation axis of α or β other than $Ax_n(\alpha)$ and $Ax_n(\beta)$. Since $\lim_{\omega} d_n(x_n, y_n) = 0$ and $\lim_{\omega} \max\{\ell_{\widetilde{M}_n}(\alpha), \ell_{\widetilde{M}_n}(\beta)\} = 0$, according to Lemma 3.1.7, we have $\lim_{\omega} d_n(w_n, z_n) \geq \lim_{\omega} d_n(w_n, x_n) + \lim_{\omega} d_n(z_n, y_n)$. Hence $[w_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is equal to $[z_n]_{n \in \mathbb{N}}$ if and only if $[w_n]_{n \in \mathbb{N}} = [z_n]_{n \in \mathbb{N}} = [y_n]_{n \in \mathbb{N}} = [x_n]_{n \in \mathbb{N}}$. This proves the result. \square

Let m be a hyperbolic metric on Σ , and let \widetilde{m} be its pullback on $\widetilde{\Sigma}$. If (Λ, μ) is a measured hyperbolic lamination on (Σ, m) , it lifts to a measured hyperbolic lamination $(\widetilde{\Lambda}, \widetilde{\mu})$ on $(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{m})$. If $\widetilde{\lambda}$ is an isolated leaf of $\widetilde{\Lambda}$, the measure on any arc transverse to $\widetilde{\lambda}$, that is disjoint of the rest of the lamination, is a Dirac measure at the intersection point between the arc and the leaf, of mass $\delta_{\widetilde{\lambda}} > 0$. We replace the leaf $\widetilde{\lambda}$ by a flat strip of width $\delta_{\widetilde{\lambda}}$ foliated by parallel leaves. Thus, we get a surface $\widetilde{\Sigma}'$ and a measured lamination, with a transverse measure, such that the measures on the arcs transverse to the lamination have no atom. The map $d' : \widetilde{\Sigma}' \times \widetilde{\Sigma}' \rightarrow \mathbb{R}^+$ defined by $d'(x, y) = \inf_{\widetilde{c}} \|\widetilde{\mu}_{\widetilde{c}}\|$, where \widetilde{c} is an arc transverse to $\widetilde{\Lambda}'$ between x and y and $\|\widetilde{\mu}_{\widetilde{c}}\|$ is the total mass of $\widetilde{\mu}_{\widetilde{c}}$, is a pseudo-distance on $\widetilde{\Sigma}'$. The quotient space $T_{(\Lambda, \mu)} = \widetilde{\Sigma}' / \sim$, with $x \sim y$ if $d'(x, y) = 0$, endowed with the distance d_{Λ} defined by d' , is an \mathbb{R} -tree, called the \mathbb{R} -tree dual to (Λ, μ) (see for example [MS4, § 1]), and the action of Γ on $\widetilde{\Sigma}'$ defines an isometric action of Γ on $T_{(\Lambda, \mu)}$. For every element $\gamma \in \Gamma - \{e\}$, we denote by α_{γ} the associated free homotopy class of closed curves of Σ . Recall that for every $\gamma \in \Gamma - \{e\}$, we have $\ell_{T_{(\Lambda, \mu)}}(\gamma) = i(\alpha_{\gamma}, (\Lambda, \mu))$ (see [MS4, § 1]).

Lemma 3.4.10 *If $\Gamma_{\widetilde{M}}$ has no global fixed point in $T_{\widetilde{M}}$, the minimal tree T_{\min} endowed with the isometric action of $\Gamma_{\widetilde{M}}$ is dual to a measured hyperbolic lamination (Λ, μ) on M (for any hyperbolic metric).*

Proof. It is a consequence of Lemma 3.4.9 and of [Sko]. \square

3.4.2 Decomposition of Σ into pieces.

In this short subsection, we introduce the notation which will be used in the next three subsections, that aim at decomposing the surface Σ into relevant pieces. For all $\alpha \in \mathcal{C}(\Sigma)$, let $\epsilon_{\alpha} = \lim_{\omega} \ell_{[q_n]}(\alpha)$. Recall that by the definition of $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and $([q_n])_{n \in \mathbb{N}}$ (see the beginning of Section 3.4), we have $\epsilon_{\alpha} < +\infty$ for every $\alpha \in \mathcal{C}(\Sigma)$. Let $\mathcal{S}_0 = \{\alpha \in \mathcal{S}(\Sigma) : \epsilon_{\alpha_0} = 0\}$. If $\mathcal{S}_0 \neq \emptyset$, we denote by Σ_0 the tight subsurface filled up by \mathcal{S}_0 (defined up to isotopy, see Lemma 3.2.3).

Let W be a tight connected subsurface of Σ . Let $\widehat{p} : \Sigma_W \rightarrow \Sigma$ be a W -cover of Σ , let \widehat{W} be the connected component of the preimage of W in Σ_W that is not simply connected, and let \widetilde{W} be a connected component of the preimage of W in $\widetilde{\Sigma}$. For all $n \in \mathbb{N}$, let $[\widehat{q}_n]$ and $[\widetilde{q}_n]$ be the pullbacks of $[q_n]$ on Σ_W and on $\widetilde{\Sigma}$, and let \widehat{W}_n and \widetilde{W}_n be the $[\widehat{q}_n]$ and $[\widetilde{q}_n]$ -geometric realizations of \widehat{W} and \widetilde{W} . Finally, let $\Gamma_{\widetilde{W}}$ be the stabilizer of \widetilde{W} in Γ .

3.4.3 The subsurface Σ_0 .

If Σ_0 is not a union of cylinders, assume in this subsection 3.4.3 that W is a connected component of Σ_0 that is not a cylinder (the cylinder components will be considered in Subsection 3.4.7).

There exists a subset $S_0(W)$ of \mathcal{S}_0 with at most $K \in \mathbb{N}$ elements (see Lemma 3.2.4) that fills up W . We can always assume that $S_0(W)$ does not contain the isotopy class of any boundary component of W . Let $S_0(\widehat{W})$ be the set of lifts of the elements of $S_0(W)$

Lemma 3.4.11 *We have $\lim_{\omega} \text{Diam}_{[\hat{q}_n]}(\widehat{W}_n) = 0$, $\lim_{\omega} \text{Area}_{[\hat{q}_n]}(\widehat{W}_n) = 0$ and for every boundary component β of \widehat{W} , we have $\lim_{\omega} \ell_{[\hat{q}_n]}(\beta) = 0$. Hence, the ultralimit $[\widehat{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is an \mathbb{R} -tree $T_{\widehat{W}}$.*

Proof. The set $S_0(\widehat{W})$ has at most $K < +\infty$ elements and, for every $\alpha \in S_0(\widehat{W})$, we have $\lim_{\omega} \ell_{[\hat{q}_n]}(\alpha) = 0$. Hence, for every $\varepsilon > 0$, there exists $I \in \omega$ such that for all $n \in I$ and $\alpha \in S_0(\widehat{W})$, we have $\ell_{[\hat{q}_n]}(\alpha) < \varepsilon$. Then, according to Lemma 3.2.9, we have $\text{Diam}_{[\hat{q}_n]}(\widehat{W}_n) \leq 11K\varepsilon$ and $\text{Area}_{[\hat{q}_n]}(\widehat{W}_n) \leq \frac{1}{\pi}(1+2b)^2(K\varepsilon)^2$ (where b is the number of boundary components of \widehat{W}). Hence $\lim_{\omega} \text{Diam}_{[\hat{q}_n]}(\widehat{W}_n) = 0$ and $\lim_{\omega} \text{Area}_{[\hat{q}_n]}(\widehat{W}_n) = 0$. Moreover, for all $n \in I$ and $\alpha \in \mathcal{S}(\widehat{W})$, if we denote by $h_n(\alpha)$ the height of the flat cylinder union of all the $[\hat{q}_n]$ -geodesic representatives of α in \widehat{W}_n (see Lemma 3.4.7), we have $\lim_{\omega} h_n(\alpha) \leq 2 \lim_{\omega} \text{Diam}_{[\hat{q}_n]}(\widehat{W}_n) = 0$.

Hence the set S of Lemma 3.4.7 corresponding to \widehat{W} is empty. Hence, the ultralimit $[\widehat{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ does not contain any flat strip, and since $\lim_{\omega} \text{Area}_{[\hat{q}_n]}(\widehat{W}_n) = 0$, according to Lemma 3.4.8 applied with $M = \widehat{W}$, the ultralimit $[\widehat{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is an \mathbb{R} -tree. \square

Lemma 3.4.12 *The action of $\Gamma_{\widehat{W}}$ on $T_{\widehat{W}}$ has a unique global fixed point $\star_{\widehat{W}}$, and for every boundary component \tilde{c} of \widehat{W} , the point $\star_{\tilde{c}}$ (see Lemma 3.4.2) is equal to $\star_{\widehat{W}}$.*

We will need the following well-known lemma, obtained by smoothing the Dirac masses of negative curvature at the singularities, see for instance [Min] for a similar result.

Lemma 3.4.13 *Let $[\hat{q}]$ be a half-translation structure on Σ_W , and let E be a finite set of homotopy classes of essential closed curves in \widehat{W} . For every $\varepsilon > 0$, there exists a Riemannian metric \hat{g} with nonpositive curvature on the smooth surface Σ_W such that $|\ell_{[\hat{q}]}(\alpha) - \ell_{\hat{g}}(\alpha)| < \varepsilon$ for all $\alpha \in E$.*

Proof of Lemma 3.4.12. Let γ be an element of $\Gamma_{\widehat{W}} - \{e\}$, and let $\hat{\alpha}_{\gamma}$ be the free homotopy class of closed curves defined by γ in \widehat{W} . For every $\varepsilon > 0$, there exists $I \in \omega$ such that for all $n \in I$ and $s_0 \in S_0(\widehat{W})$, we have $\ell_{[\hat{q}_n]}(s_0) \leq \varepsilon$. Let $E = S_0(\widehat{W}) \cup \{\hat{\alpha}_{\gamma}\}$. According to Lemma 3.4.13, there exists a Riemannian metric \hat{g} with nonpositive curvature on Σ_W such that for every $\alpha \in E$, we have $|\ell_{[\hat{q}_n]}(\alpha) - \ell_{\hat{g}}(\alpha)| < \varepsilon$. Let $\widehat{W}_{\hat{g}}$ be the \hat{g} -geometric realization of \widehat{W} . Since $S_0(\widehat{W})$ fills up \widehat{W} , the union G of some \hat{g} -geodesic representatives of the elements of $S_0(\widehat{W})$ (one by element of $S_0(\widehat{W})$) is a graph whose complementary components in $\widehat{W}_{\hat{g}}$ are disks and half-open cylinders that can be homotoped to some boundary components of $\widehat{W}_{\hat{g}}$. Moreover, since the lengths of these \hat{g} -geodesics are at most 2ε , and $S_0(\widehat{W})$ has at most K elements, the sum of the lengths of the edges of G is at most $2K\varepsilon$. Hence the perimeters of the complementary disks are at most $4K\varepsilon$ and the circonferences of the complementary cylinders are at most $2K\varepsilon$. Since \hat{g} is a Riemannian metric with nonpositive curvature, the length of an intersection segment of a \hat{g} -geodesic representative of $\hat{\alpha}_{\gamma}$ with a complementary component of G is at most $4K\varepsilon$, and since the intersection number between two \hat{g} -geodesics is minimal, we have $\ell_{\hat{g}}(\hat{\alpha}_{\gamma}) \leq 2K\varepsilon \sum_{s_0 \in S_0(\widehat{W})} i(\hat{\alpha}_{\gamma}, s_0)$, and $\ell_{[\hat{q}_n]}(\hat{\alpha}_{\gamma}) \leq 2K\varepsilon \sum_{s_0 \in S_0(\widehat{W})} i(\hat{\alpha}_{\gamma}, s_0) + \varepsilon$. Hence, we have $\ell_{T_{\widehat{W}}}(\gamma) = \lim_{\omega} \ell_{[\hat{q}_n]}(\hat{\alpha}_{\gamma}) = 0$, so that γ has a fixed point in $T_{\widehat{W}}$. Hence, all the elements of $\Gamma_{\widehat{W}}$ are elliptic in $T_{\widehat{W}}$, and according to a lemma of Serre (see [Sha, p. 271]), $\Gamma_{\widehat{W}}$ has a global fixed point. Moreover, according to Lemma 3.1.7 used as in the proof of Lemma 3.4.9, two elements of $\Gamma_{\widehat{W}}$ which are not powers of a common element have at most one common fixed point. Hence, the global fixed point is unique.

Moreover, if $\gamma_1 \in \Gamma_{\widetilde{W}} - \{e\}$ preserves a boundary component \widetilde{c} of \widetilde{W} and $\gamma_2 \in \Gamma_{\widetilde{W}}$ does not preserve any boundary component of \widetilde{W} , according to Lemma 3.4.4, the geodesic $[Ax_n(\gamma_1)]_{n \in \mathbb{N}}$ can intersect $[Ax_n(\gamma_2)]_{n \in \mathbb{N}}$ at most at $\star_{\widetilde{c}}$. Since the sets $[Ax_n(\gamma_1)]_{n \in \mathbb{N}}$ and $[Ax_n(\gamma_2)]_{n \in \mathbb{N}}$ are the sets of fixed points of γ_1 and γ_2 in $T_{\widetilde{W}}$, the unique common point of γ_1 and γ_2 in $T_{\widetilde{W}}$ is $\star_{\widetilde{c}}$. Hence, for every boundary component \widetilde{c} of \widetilde{W} , the point $\star_{\widetilde{c}}$ is equal to $\star_{\widetilde{W}}$. \square

Remark. According to Lemmas 3.4.11 and 3.4.12, in both cases ($\lim_{\omega} \lambda_n = +\infty$ or $\lim_{\omega} \lambda_n < +\infty$), the subsurface Σ_0 cannot be equal to Σ , since then Γ would have a global fixed point in $\lim_{\omega}(\widetilde{\Sigma}, [\widetilde{q}_n])$.

3.4.4 Complementary connected components of Σ_0 in Σ .

In this subsection 3.4.4, we assume that W is the closure of a connected component of $\Sigma - \Sigma_0$. Then W is compact, connected and π_1 -injective. We assume first that W is neither a cylinder nor a pair of pants. Since no connected component of Σ_0 is a disk and the boundary of Σ is empty, the subsurface W is tight.

Lemma 3.4.14 *Either there exists $\varepsilon > 0$ and $I \in \omega$ such that for all $n \in I$ and $\alpha \in \mathcal{S}(W)$, we have $\ell_{[q_n]}(\alpha) \geq \varepsilon$, or there exists a sequence $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}(W)$ such that $(\epsilon_{\alpha_k})_{k \in \mathbb{N}}$ (strictly) decreases to zero.*

Remark. In the first case, for all $n \in I$ and $\alpha \in \mathcal{C}(W)$, we have $\ell_{[q_n]}(\alpha) \geq \varepsilon$. We will see that this case cannot happen if $\lim_{\omega} \lambda_n = +\infty$.

We will need the following two lemmas. Let m be a hyperbolic metric on Σ and let W_m be the m -geodesic realization of W . Let (Λ, μ) be a measured hyperbolic lamination of W_m .

Lemma 3.4.15 *There exists a possibly constant sequence $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}(W)$ such that the sequence $(i((\Lambda, \mu), \alpha_k))_{k \in \mathbb{N}}$ decreases to zero.*

Proof. If Λ contains a simple closed geodesic β , we take α_k equal to the homotopy class of β for all $k \in \mathbb{N}$. Otherwise, let L_1 be a minimal component of Λ . For every $k \in \mathbb{N}$, let c be a transverse arc to L_1 , that meets L_1 and does not meet any other minimal component of Λ , such that the total μ -mass of c is at most $\frac{1}{k}$. Since the intersection of any leaf of L_1 with c is dense in the Cantor set $L_1 \cap c$, there exist two distinct points in c belonging to the same leaf. Then, if α'_k is the concatenation of the segment of this leaf and of the segment of c between these two points, we have $i(\alpha'_k, (\Lambda, \mu)) \leq \frac{1}{k}$. Moreover, the image of α'_k contains the image of an essential simple closed curve $\alpha_k \in \mathcal{S}(W)$, and $i(\alpha_k, (\Lambda, \mu)) \leq i(\alpha'_k, (\Lambda, \mu)) \leq \frac{1}{k}$. \square

We recall that (Λ, μ) fills up W if $i(\alpha, (\Lambda, \mu)) > 0$ for all $\alpha \in \mathcal{C}(\Sigma)$ that topologically cuts W (or equivalently for all $\alpha \in \mathcal{C}(W)$, since W is not a cylinder). If (Λ', μ') is another measured hyperbolic lamination of W_m , recall that (Λ, μ) and (Λ', μ') jointly fill up W if $i(\alpha, (\Lambda, \mu)) + i(\alpha, (\Lambda', \mu')) > 0$ for all $\alpha \in \mathcal{C}(W)$, and $i((\Lambda, \mu), (\Lambda', \mu')) > 0$.

Lemma 3.4.16 *Assume that (Λ, μ) and (Λ', μ') jointly fill up W , and let $(\Lambda_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and $(\Lambda'_n, \mu'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be two sequences of measured hyperbolic laminations of Σ that respectively ω -converge to two measured hyperbolic laminations of Σ whose intersections with W_m are equal to (Λ, μ) and (Λ', μ') . There exist $I \in \omega$ and $\varepsilon > 0$ such that $i(\alpha, (\Lambda_n, \mu_n)) + i(\alpha, (\Lambda'_n, \mu'_n)) \geq \varepsilon$ for all $n \in I$ and $\alpha \in \mathcal{S}(W)$.*

Proof. Assume for a contradiction that there exists a sequence $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}(W)$ such that $\lim_{\omega} i(\alpha_n, (\Lambda_n, \mu_n)) = \lim_{\omega} i(\alpha_n, (\Lambda'_n, \mu'_n)) = 0$. Then, there exists a positive real sequence $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ such that $(t_n \alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ω -converges to a measured hyperbolic lamination (L, ν) of W_m . First, L is not a boundary component of W_m since then α_n would spiral around this boundary component, for n large enough, which is impossible for an essential simple closed geodesic of W_m . Moreover, we have $\lim_{\omega} t_n < +\infty$, hence

$$i((L, \nu), (\Lambda, \mu)) + i((L, \nu), (\Lambda', \mu')) = 0$$

If L contains a simple closed geodesic α , then $i(\alpha, (\Lambda, \mu)) + i(\alpha, (\Lambda', \mu')) = 0$, which is impossible since (Λ, μ) and (Λ', μ') jointly fill up W . Let L_1 be a minimal component of L , and let $\Sigma(L_1) \subseteq W_m$ be the connected subsurface filled up by L_1 (see Definition 3.2.1). If $\Sigma(L_1)$ were not equal to W_m up to isotopy, there would exist a boundary component α of $\Sigma(L_1)$ which would be essential in W , and then $i(\alpha, (\Lambda, \mu)) + i(\alpha, (\Lambda', \mu')) = 0$, a contradiction. Hence, the lamination L_1 fills up W . By the condition $i((L, \nu), (\Lambda, \mu)) + i((L, \nu), (\Lambda', \mu')) = 0$, we have $\Lambda \subseteq L_1$ and $\Lambda' \subseteq L_1$, and since L_1 is minimal, we have $L_1 = \Lambda = \Lambda'$, a contradiction since $i((\Lambda, \mu), (\Lambda', \mu')) > 0$. \square

Proof of Lemma 3.4.14. For all $n \in \mathbb{N}$, we choose a quadratic differential q_n representing $[q_n]$, and we denote by $(\mathcal{F}_n^h, \mu_n^h)$ and $(\mathcal{F}_n^v, \mu_n^v)$ (the equivalence classes of) its horizontal and vertical measured foliations. There exist two positive real sequences $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ such that $x_n(\mathcal{F}_n^h, \mu_n^h)_{n \in \mathbb{N}}$ and $y_n(\mathcal{F}_n^v, \mu_n^v)_{n \in \mathbb{N}}$ ω -converge to two (equivalence classes of) measured foliations (\mathcal{F}^h, μ^h) and (\mathcal{F}^v, μ^v) . For all $n \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in \mathcal{C}(\Sigma)$, we have

$$\max\{i(\alpha, (\mathcal{F}_n^h, \mu_n^h)), i(\alpha, (\mathcal{F}_n^v, \mu_n^v))\} \leq \ell_{[q_n]}(\alpha) \leq i(\alpha, (\mathcal{F}_n^h, \mu_n^h)) + i(\alpha, (\mathcal{F}_n^v, \mu_n^v)). \quad (3.1)$$

Assume for a contradiction that $\lim_{\omega} x_n = 0$. Since μ^h is nonzero, there exists $\alpha \in \mathcal{S}(\Sigma)$ such that $\lim_{\omega} i(\alpha, (\mathcal{F}_n^h, x_n \mu_n^h)) = i(\alpha, (\mathcal{F}^h, \mu^h)) > 0$. However, $\lim_{\omega} i(\alpha, (\mathcal{F}_n^h, x_n \mu_n^h)) \leq \lim_{\omega} x_n \ell_{[q_n]}(\alpha) = 0$, since $\lim_{\omega} \ell_{[q_n]}(\alpha) < +\infty$. Hence, $\lim_{\omega} x_n$ is nonzero, and similarly $\lim_{\omega} y_n$ is nonzero.

Assume for a contradiction that $\lim_{\omega} x_n = \lim_{\omega} y_n = +\infty$. Then, for all $\alpha \in \mathcal{S}(W)$, we have

$$\begin{aligned} \lim_{\omega} \ell_{[q_n]}(\alpha) &\leq \lim_{\omega} (i(\alpha, (\mathcal{F}_n^h, \mu_n^h)) + i(\alpha, (\mathcal{F}_n^v, \mu_n^v))) \\ &\leq \lim_{\omega} \left(\frac{1}{x_n} i(\alpha, (\mathcal{F}_n^h, x_n \mu_n^h)) + \frac{1}{y_n} i(\alpha, (\mathcal{F}_n^v, y_n \mu_n^v)) \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

a contradiction since α is essential in W and hence does not belong to \mathcal{S}_0 . Hence, up to permuting $(\mathcal{F}_n^h, \mu_n^h)_{n \in \mathbb{N}}$ and $(\mathcal{F}_n^v, \mu_n^v)_{n \in \mathbb{N}}$, we can assume that $\lim_{\omega} x_n < +\infty$. This means that the sequence $(\mathcal{F}_n^h, \mu_n^h)_{n \in \mathbb{N}}$, without renormalization, ω -converges to a (nonzero equivalence class of) measured foliation, still denoted by (\mathcal{F}^h, μ^h) .

Assume first that $\lim_{\omega} y_n < +\infty$. Then, the sequence $(\mathcal{F}_n^v, \mu_n^v)_{n \in \mathbb{N}}$ also ω -converges, without renormalization, to a (nonzero, equivalence class of) measured foliation, still denoted by (\mathcal{F}^v, μ^v) . If α is a boundary component of W , it is also a boundary component of Σ_0 and we have $\lim_{\omega} \ell_{[q_n]}(\alpha) = 0$. Hence, by Equation (3.1) $i(\alpha, (\mathcal{F}^h, \mu^h)) = i(\alpha, (\mathcal{F}^v, \mu^v)) = 0$. Consequently, if (Λ^h, ν^h) and (Λ^v, ν^v) are the measured hyperbolic laminations of (Σ, m) associated with (\mathcal{F}^h, μ^h) and (\mathcal{F}^v, μ^v) (see for instance [Lev]), then no leaf of Λ^v or Λ^h intersects the boundary of W_m , and the intersections $\Lambda_W^h = \Lambda^h \cap W_m$ and $\Lambda_W^v = \Lambda^v \cap W_m$, endowed with the induced transverse measures (if not empty), are measured hyperbolic laminations.

If (Λ_W^h, μ^h) and (Λ_W^v, μ^v) jointly fill up W , according to Lemma 3.4.16, there exist $I \in \omega$ and $\varepsilon > 0$ such that, for all $n \in I$ and $\alpha \in \mathcal{S}(W)$, we have $i(\alpha, (\mathcal{F}_n^h, \mu_n^h)) + i(\alpha, (\mathcal{F}_n^v, \mu_n^v)) \geq \varepsilon$, hence $\ell_{[q_n]}(\alpha) \geq \max\{i(\alpha, (\mathcal{F}_n^h, \mu_n^h)), i(\alpha, (\mathcal{F}_n^v, \mu_n^v))\} \geq \frac{\varepsilon}{2}$, so that the first conclusion of Lemma 3.4.14 holds.

Recall that there exists no $\alpha \in \mathcal{S}(W)$ such that $i(\alpha, (\Lambda^h, \mu^h)) + i(\alpha, (\Lambda^v, \mu^v)) = 0$, since then α would belong to \mathcal{S}_0 by Equation (3.1), and would have a representative contained in Σ_0 . Hence, if (Λ_W^h, μ^h) and (Λ_W^v, μ^v) do not jointly fill up W , then $i((\Lambda_W^h, \mu^h), (\Lambda_W^v, \mu^v)) = 0$. Assume first that $i((\Lambda_W^h, \mu^h), (\Lambda_W^v, \mu^v)) = 0$ and that the two sets Λ_W^h and Λ_W^v are not empty. Let $\Sigma(\Lambda_W^h) \subseteq W_m$ be the subsurface with m -geodesic boundary filled up by Λ_W^h . Assume for a contradiction that $\Sigma(\Lambda_W^h)$ is strictly contained in W_m . Let β be a boundary component of $\Sigma(\Lambda_W^h)$. Since Λ_W^h fills up $\Sigma(\Lambda_W^h)$ and $i((\Lambda_W^h, \mu^h), (\Lambda_W^v, \mu^v)) = 0$, we have $i(\beta, (\Lambda_W^v, \mu^v)) = 0$ and $i(\beta, (\Lambda_W^h, \mu^h)) = 0$ since β is a boundary component of $\Sigma(\Lambda_W^h)$. Hence $i(\beta, (\Lambda^h, \mu^h)) + i(\beta, (\Lambda^v, \mu^v)) = 0$, a contradiction since β is essential in W . Hence, Λ_W^h fills W and similarly Λ_W^v fills W . Since $i((\Lambda^h, \mu^h), (\Lambda^v, \mu^v)) = 0$, one of these hyperbolic laminations is contained in the otherone. Moreover, the two laminations are minimal since W is connected, and hence they are equal. Hence, either one of the sets Λ_W^h, Λ_W^v is empty, or the laminations Λ_W^h and Λ_W^v are equal. In both cases, according to Lemma 3.4.15, there exists a sequence $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ of $\mathcal{S}(W)$ such that $i(\alpha_k, (\Lambda_W^h, \mu^h)) + i(\alpha_k, (\Lambda_W^v, \mu^v))$ strictly decreases to zero, hence the second conclusion of Lemma 3.4.14 holds by Equation (3.1).

Assume next that $\lim_{\omega} y_n = +\infty$. If β is a boundary component of W , as above, by Equation (3.1), we have $i(\beta, (\mathcal{F}^h, \mu^h)) \leq \lim_{\omega} \ell_{[q_n]}(\beta) = 0$. Consequently, if we denote by (Λ^h, ν^h) the measured hyperbolic lamination of (Σ, m) associated with (\mathcal{F}^h, μ^h) , then no leaf of Λ^h intersects the boundary of W_m . Moreover, the intersection $\Lambda_W^h = \Lambda^h \cap W_m$ is not empty, otherwise all the elements of $\mathcal{S}(W)$ would belong to \mathcal{S}_0 by Equation (3.1). Hence, the set Λ_W^h , endowed with the induced transverse measure, is a measured hyperbolic lamination. For all $\alpha \in \mathcal{S}(W)$ and $n \in \mathbb{N}$, we have

$$\max\{i(\alpha, (\mathcal{F}_n^h, \mu_n^h)), \frac{1}{y_n} i(\alpha, (\mathcal{F}_n^v, y_n \mu_n^v))\} \leq \ell_{[q_n]}(\alpha) \leq i(\alpha, (\mathcal{F}_n^h, \mu_n^h)) + \frac{1}{y_n} i(\alpha, (\mathcal{F}_n^v, y_n \mu_n^v)).$$

Hence, $\lim_{\omega} \ell_{[q_n]}(\alpha) = i(\alpha, (\Lambda^h, \nu^h))$. As above, there exists a sequence $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ of $\mathcal{S}(W)$ such that $i(\alpha_k, (\Lambda^h, \nu^h))$ strictly decreases to zero, hence the second conclusion of Lemma 3.4.14 holds by Equation (3.1). \square

3.4.5 Case of degeneration.

In this section 3.4.5, we assume as in the previous one that W is the closure of a complementary connected component of Σ_0 which is neither a cylinder nor a pair of pants. We will study the asymptotic behavior of the restriction to W of the sequence of half-translation structures $([q_n])_{n \in \mathbb{N}}$ under the hypothesis that the second conclusion of Lemma 3.4.14 holds, i.e. there exists a sequence $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ of $\mathcal{S}(W)$ such that $(\epsilon_{\alpha_k})_{k \in \mathbb{N}}$ strictly decreases to zero.

Lemma 3.4.17 *If there exists a sequence $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ such that $(\epsilon_{\alpha_k})_{k \in \mathbb{N}}$ strictly decreases to zero, then the ultralimit $[\widetilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is an \mathbb{R} -tree, on which the isometric action of $\Gamma_{\widetilde{W}}$ has no global fixed point. Moreover, the minimal subtree of $[\widetilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ for the action of $\Gamma_{\widetilde{W}}$ is dual to a measured hyperbolic lamination (Λ, μ) (for any hyperbolic metric on Σ), which fills up W .*

Remark. Since W is connected, if Λ is filling, it is also minimal.

Proof. For all $p \in \mathbb{N}$, we denote by W_p the subsurface of Σ filled up by $\{\alpha_k : k \geq p\}$ (defined up to isotopy). According to Lemma 3.2.2, if $p_2 \geq p_1$, up to isotopy, the subsurface W_{p_2} is contained in the interior of W_{p_1} . Moreover, if W_{p_2} is not isotopic to W_{p_1} , then at least one connected component of $W_{p_1} - W_{p_2}$ has a negative Euler characteristic, hence $\chi(W_{p_2}) > \chi(W_{p_1})$. Since the Euler characteristic of W_p is non positive for all $p \in \mathbb{N}$, there exists $P \in \mathbb{N}$ such that W_p is isotopic to W_P for all $p \geq P$. We denote by W'_P a (isotopy class of a) connected component of W_P . Since W'_P is filled up by some essential simple closed curves, it is not a pair of pants. Assume for a contradiction that it is a cylinder. Let α be a isotopy class of simple closed curves contained in W'_P . For every $\varepsilon > 0$, there exists $p \geq P$ such that $\epsilon_{\alpha_p} \leq \varepsilon$, and α_p fills up W'_P . Since W'_P is assumed to be a cylinder, we have $\alpha = \alpha_p^{\pm 1}$, and $\epsilon_\alpha = \epsilon_{\alpha_p} < \varepsilon$. Hence α belongs to \mathcal{S}_0 , which is impossible since α is essential in W . Hence, the subsurface W'_P is not a cylinder.

Let $\varepsilon > 0$. There exists $p_0 > P$ such that $\epsilon_{\alpha_k} < \frac{\varepsilon}{2}$ for all $k > p_0$, and according to Lemma 3.2.4, there exists a subset of $\{\alpha_k\}_{k > p_0}$, with at most $K \in \mathbb{N}$ elements (where K only depends on the topology of W), that fills up W'_P . Since $K < +\infty$, there exists $I \in \omega$ such that $\ell_{[q_n]}(\alpha) \leq \varepsilon$ for all α in this subset and $n \in I$. Let $\Sigma_{W'_P}$ be a W'_P -cover of Σ , let \widehat{W}'_P be the connected component of the preimage of W'_P in $\Sigma_{W'_P}$ which is not simply connected, and for all $n \in I$, let $[\widehat{q}_n]$ be the pullback of $[q_n]$ to $\Sigma_{W'_P}$. We denote by $\widehat{W}'_{P,n}$ the $[\widehat{q}_n]$ -geometric realization of \widehat{W}'_P . According to Lemma 3.2.9, the length of any boundary component of $\widehat{W}'_{P,n}$ is at most $K\varepsilon$, the diameter of $\widehat{W}'_{P,n}$ is at most $11K\varepsilon$ and its area is at most $\frac{1}{\pi}(1+2b)^2(K\varepsilon)^2$ (where b is the number of boundary components of \widehat{W}'_P). Hence, if β is (the homotopy class of) a boundary component of W'_P , then $\epsilon_\beta = 0$ and β belongs to \mathcal{S}_0 . Therefore β is a boundary component of Σ_0 and of W . Hence, $W'_P = W_P = W$ (we will then replace W'_P and W_P by W). Moreover, the area and the diameter of \widehat{W}'_n ω -converge to zero. As for the proof of Lemma 3.4.9, the set S of Lemma 3.4.7 associated with \widehat{W} is empty, and according to Lemma 3.4.8 applied with $M = \widehat{W}$, the ultralimit $[\widehat{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is an \mathbb{R} -tree. Recall that by the definition of Σ_0 , for all $\alpha \in \mathcal{S}(W)$, we have $\epsilon_\alpha > 0$, hence the action of $\Gamma_{\widehat{W}}$ on $[\widehat{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ has no elliptic element, except the stabilizers of the boundary components of \widehat{W} . Hence, according to Lemmas 3.4.9 and 3.4.10, the minimal subtree for the action of $\Gamma_{\widehat{W}}$ is dual to a measured hyperbolic lamination (Λ, μ) (for any hyperbolic metric m on Σ), of (the m -geometric realization of) W . Moreover, for every $\alpha \in \mathcal{C}(W)$, we have $i(\alpha, (\Lambda, \mu)) = \epsilon_\alpha > 0$, hence (Λ, μ) fills up W . \square

Let T_{\min} be the minimal subtree of $[\widehat{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ for the action of $\Gamma_{\widehat{W}}$, and let (Λ, μ) be the measured hyperbolic lamination of (the m -geometric realization of) W dual to T_{\min} .

By the compactness of the space of projective measured hyperbolic laminations, there exists a positive real sequence $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ such that the sequence $(t_k \alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ω -converges to a measured hyperbolic lamination $(\Lambda_\alpha, \mu_\alpha)$ of W .

Lemma 3.4.18 *The laminations Λ and Λ_α are equal.*

Proof. Since $\lim_{\omega} t_k < +\infty$, we have

$$\begin{aligned} i((\Lambda, \mu), (\Lambda_\alpha, \mu_\alpha)) &= \lim_{\omega} t_k i((\Lambda, \mu), \alpha_k) \\ &= \lim_{\omega} t_k \epsilon_{\alpha_k} = 0. \end{aligned}$$

Since the subsurface W is filled up by Λ , the lamination Λ_α is contained in Λ , and since Λ is minimal, they are equal. \square

Lemma 3.4.19 *Let $\gamma \in \Gamma_{\widetilde{W}} - \{e\}$. Then γ has a fixed point in T_{\min} if and only if γ preserves a boundary component \tilde{c} of \widetilde{W} . This fixed point is unique, equal to $\star_{\tilde{c}}$.*

Proof. For every $\alpha \in \mathcal{C}(W)$, we have $\lim_{\omega} \ell_{[q_n]}(\alpha) = \epsilon_{\alpha} > 0$, and if α is the homotopy class of a boundary component of W , then $\lim_{\omega} \ell_{[q_n]}(\alpha) = 0$. Hence, an element $\gamma \in \Gamma_{\widetilde{W}} - \{e\}$ has a fixed point in $[\widetilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ if and only if γ preserves a boundary component \tilde{c} of \widetilde{W} . For all $n \in \mathbb{N}$, let \tilde{c}_n be the boundary component of \widetilde{W}_n corresponding to \tilde{c} . Then, according to Remark 3.4.1, the set of fixed points of γ in $T_{\widetilde{W}}$ is $[\tilde{c}_n]_{n \in \mathbb{N}}$. Moreover, the minimal subtree T_{\min} is the union of the translation axes of the hyperbolic elements of $\Gamma_{\widetilde{W}}$ in $T_{\widetilde{W}}$, and according to Lemma 3.4.4, this union intersects $[\tilde{c}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ only at $\star_{\tilde{c}}$. \square

3.4.6 Case of non degeneration.

In this subsection 3.4.6, we assume as in the previous one that W is the closure of a complementary connected component of Σ_0 which is neither a cylinder nor a pair of pants. We consider now the case where the first conclusion of Lemma 3.4.14 holds, i.e. there exists $\varepsilon > 0$ such that for all $\alpha \in \mathcal{S}(W)$ and ω -almost all $n \in \mathbb{N}$, we have $\ell_{[q_n]}(\alpha) \geq \varepsilon$. The boundary components of W (if any) are also some boundary components of Σ_0 , hence their $[q_n]$ -lengths ω -converge to zero. Since W has finitely many boundary components, there exists $I \in \omega$ such that for every boundary component c of W and all $n \in I$, we have $\ell_{[q_n]}(c) \leq \frac{\varepsilon}{5}$. We replace the sequence $([q_n])_{n \in \mathbb{N}}$ by $([q_n])_{n \in I}$. Hence, in the remainder of this Section 3.4.6, we can assume that $\varepsilon > 0$ is given so that :

- for all $\alpha \in \mathcal{C}(W)$, we have $\lim_{\omega} \ell_{[q_n]}(\alpha) < +\infty$;
- for all $n \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in \mathcal{C}(W)$, we have $\ell_{[q_n]}(\alpha) \geq \varepsilon$;
- for every boundary component c of W and $n \in \mathbb{N}$, we have $\ell_{[q_n]}(c) \leq \frac{\varepsilon}{5}$, and $\lim_{\omega} \ell_{[q_n]}(c) = 0$.

Remark. If $\lim_{\omega} \lambda_n = +\infty$, we have $\lim_{\omega} \text{Area}_{[\widehat{q}_n]}(\widehat{W}_n) = 0$. Hence, according to Section 3.4.8, either there exists α in the set S of Lemma 3.4.7, corresponding to \widehat{W} , and then $\lim_{\omega} \ell_{[\widehat{q}_n]}(\alpha) = 0$, or according to Lemma 3.4.10 applied with $M = \widehat{W}$, the action of $\Gamma_{\widetilde{W}}$ on the minimal $\Gamma_{\widetilde{W}}$ -invariant subtree T_{\min} of $[\widetilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is dual to a measured hyperbolic lamination, and according to Remark 3.4.1 and to Lemma 3.4.15, the set $\{\lim_{\omega} \ell_{[\widehat{q}_n]}(\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{S}(\widehat{W})}$ is not bounded below by a positive constant. Hence, the case of Section 3.4.6 cannot hold if $\lim_{\omega} \lambda_n = +\infty$.

Lemma 3.4.20 *For all $n \in \mathbb{N}$, the boundary components of \widehat{W}_n (if any) are simple and pairwise disjoint. Moreover, there exists no essential arc of \widehat{W}_n between two (possibly equal) boundary components of \widehat{W}_n , of length less than $\frac{\varepsilon}{4}$.*

Proof. For all $n \in \mathbb{N}$, in the construction of \widehat{W}_n (see [Raf]), the boundary components of \widehat{W}_n are simple. Assume for a contradiction that there exist two distinct boundary components that intersect each other, or that there exists an essential arc of length less than $\frac{\varepsilon}{4}$ between two (possibly equal) boundary components of \widehat{W}_n . Since W is not a cylinder, the union of the image(s) of this (or these) boundary component(s) with (possibly) the essential arc, contains a closed curve of length less than $\frac{2}{5}\varepsilon + \frac{2}{4}\varepsilon < \varepsilon$, which is not freely homotopic to a point nor to a boundary component of \widehat{W} , and hence is (freely homotopic to) an essential closed curve of \widehat{W} , a contradiction. \square

Remark. This does not necessarily mean that the geodesic representatives of the boundary components of W in $(\Sigma, [q_n])$ are simple and pairwise disjoint for all $n \in \mathbb{N}$.

According to Lemma 3.4.20, the boundary components of \widetilde{W}_n are pairwise at distance at least $\frac{\varepsilon}{4}$. Let $H_{\widetilde{W}}$ be the subset of non trivial and non peripheral elements of $\Gamma_{\widetilde{W}}$: their action on $[\widetilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is hyperbolic. For every $\gamma \in H_{\widetilde{W}}$, let $F(\gamma)$ be the (possibly degenerated) flat strip, union of all the translation axes of γ in $[\widetilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$. We will see that the convex hull of $\bigcup_{\gamma \in H_{\widetilde{W}}} F(\gamma)$ contains all the points $\star_{\tilde{c}}$, with \tilde{c} a boundary component of \widetilde{W} (see Lemma 3.4.2 for the definition). Let \widetilde{W}_ω be the convex hull of $\bigcup_{\gamma \in H_{\widetilde{W}}} F(\gamma)$ minus the points $\star_{\tilde{c}}$, with \tilde{c} a boundary component of \widetilde{W} (if any).

Lemma 3.4.21 *The set \widetilde{W}_ω is a surface without boundary, endowed with a $\Gamma_{\widetilde{W}}$ -invariant half-translation structure.*

Proof of Lemma 3.4.21. We will need the following lemmas.

Lemma 3.4.22 *The set $[\widetilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}} - [\partial \widetilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is a surface endowed with a $\Gamma_{\widetilde{W}}$ -invariant Euclidean metric with conical singularities of angles $k\pi$ with $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$.*

Proof. Let $[x_n]_{n \in \mathbb{N}}$ be a point of $[\widetilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}} - [\partial \widetilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$.

Lemma 3.4.23 *There exist $I \in \omega$ and $\delta > 0$ such that for all $n \in I$, the open ball $B_n(x_n, \delta)$ of radius δ contains at most one point of any $\Gamma_{\widetilde{W}}$ -orbit.*

Proof. Since $[x_n]_{n \in \mathbb{N}}$ does not belong to $[\partial \widetilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$, there exist $I \in \omega$ and $\eta > 0$ such that for all $n \in I$, the open ball $B_n(x_n, \eta)$ is contained in the interior of \widetilde{W}_n . Let $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\eta}{3}\}$. Let $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence in $\widetilde{\Sigma}$ such that z_n belongs to $B_n(x_n, \delta)$ for all $n \in \mathbb{N}$, and let $\gamma \in \Gamma_{\widetilde{W}} - \{e\}$. Either γ does not stabilize any boundary component of \widetilde{W}_n , then $d_n(z_n, \gamma z_n) \geq \varepsilon \geq 2\delta$ and γz_n does not belong to $B_n(x_n, \delta)$, or γ preserves a boundary component \tilde{c}_n of \widetilde{W}_n , and since $d_n(z_n, \tilde{c}_n) \geq \eta - \delta \geq 2\delta$, according to Lemma 3.1.6, we have $d_n(z_n, \gamma z_n) \geq 2\delta$ and γz_n does not belong to $B_n(x_n, \delta)$. Hence, for all $n \in I$, the ball $B_n(x_n, \delta)$ contains at most one point of any $\Gamma_{\widetilde{W}}$ -orbit in $\widetilde{\Sigma}$. \square

We fix δ as in Lemma 3.4.23. According to the Gauss-Bonnet formula, and since the angles at the singular points are at least 3π , the number of singular points in \widetilde{W}_n , and their total angles are uniformly bounded. Consequently, the surface \widetilde{W}_n has a constant number of singular points of constant angles, for ω -almost all $n \in \mathbb{N}$. Hence, there exists $k \in \mathbb{N}$ such that, for ω -almost all $n \in \mathbb{N}$, the ball $B_n(x_n, \delta)$ contains k singular points, denoted by $y_{1,n}, \dots, y_{k,n}$ with angles $\theta_1, \dots, \theta_k$ respectively.

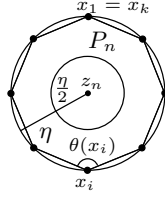
Let $[z_n]_{n \in \mathbb{N}}$ be a point of $B_\omega([x_n]_{n \in \mathbb{N}}, \frac{\delta}{2})$. Assume first that there exists $\eta > 0$ such that $B_n(z_n, \eta)$ does not contain any singular point for ω -almost all $n \in \mathbb{N}$. Then, the ball $B_\omega([z_n]_{n \in \mathbb{N}}, \frac{\eta}{2})$ is a Euclidean disk.

If there does not exist such a η , there exists a sequence of singular points $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ with $\lim_\omega d_n(z_n, y_n) = 0$, and according to Lemma 3.4.23, there exists $\mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, k\}$ such that for any sequence of singular points $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, we have $\lim_\omega d_n(y_n, z_n) = 0$ if and only if there exists $i \in \mathcal{J}$ and $I \in \omega$ such that $y_n = y_{i,n}$ for all $n \in I$.

Lemma 3.4.24 *The point $[z_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is then a singular point of angle $2\pi + \sum_{i \in \mathcal{J}} (\theta_i - 2\pi)$.*

Proof. Let $I \in \omega$ be such that for any sequence of singular points $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, we have $\lim_{\omega} d_n(y_n, z_n) = 0$ if and only if there exist $i \in \mathcal{I}$ such that $y_n = y_{i,n}$ for all $n \in I$. Since, for all $n \in I$, the ball $B_n(x_n, \delta)$ contains $k < +\infty$ singular points, there exists $\eta' > 0$ small enough such that $B_n(z_n, \eta')$ is contained in $B_n(x_n, \delta)$, and there exists $\eta < \eta'$ such that for ω -almost all $n \in I$, the only singular points contained in $B_n(z_n, \eta')$ belongs to $B_n(z_n, \frac{\eta}{2})$.

Let $n \in I$. The boundary \mathcal{C}_n of $B_n(z_n, \eta)$ is naturally endowed with a cyclic order. Let x_0 be a point of \mathcal{C}_n and let $(x_i)_{i \in \{0, \dots, p_n\}}$, with $p_n \in \mathbb{N}$, be a finite sequence, increasing for the cyclic order, defined by $d_n(x_i, x_{i+1}) = r$, with $r \in [\frac{\eta}{4}, \frac{\eta}{3}]$, for all $i \in \{0, \dots, p_n - 1\}$, and such that x_{p_n} is contained between x_0 and x_1 . The map $r \mapsto x_{p_n}$ is continuous, except at a few points, and there exists $r \in [\frac{\eta}{4}, \frac{\eta}{3}]$ such that $x_{p_n} = x_0$. Moreover, the ball $B_n(z_n, \eta)$ contains at most one point of any $\Gamma_{\widetilde{W}}$ -orbit, hence it embeds into \widehat{W}_n , and according to [Min, Lem. 4.1], for all $n \in I$, the length of \mathcal{C}_n is at most $L\eta$, where L depends on $\chi(\widehat{W})$. Hence, the integer p_n is bounded by $L\eta/\frac{\eta}{3} = 3L$, and there exists $p \in \mathbb{N}^*$ such that it is equal to $p \in \mathbb{N}$ for ω -almost all $n \in I$. Up to changing I , we can assume that for all $n \in I$, there exists a topological disk P_n whose boundary is a finite union of p Euclidean segments of equal length between $\frac{\eta}{4}$ and $\frac{\eta}{3}$, whose endpoints belong to \mathcal{C}_n . Moreover, for all $n \in I$, the boundary \mathcal{C}_n is contained in $\overline{B}_n(z_n, \eta) - B_n(z_n, \frac{2\eta}{3})$, and by the choice of η , the distance d_{ω} is locally Euclidean on $[\overline{B}_n(z_n, \eta) - B_n(z_n, \frac{2\eta}{3})]_{n \in \mathbb{N}}$, hence $[P_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is a topological disk whose boundary is a union of p Euclidean segments.

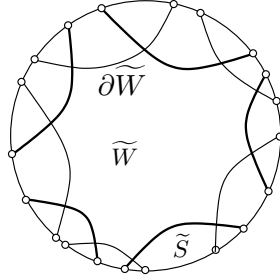


The interior Euclidean angle $\theta_n(x_i)$ at a vertex x_i is determined by the distance between the midpoints of the segments adjacent to x_i , and it ω -converges to an angle $\theta_{\omega}(x_i)$ determined by the distance between the midpoints of the segments adjacent to the corresponding vertex. According to the Gauss-Bonnet formula applied to P_n , for all $n \in I$, we have $2\pi = \sum_{i \in \mathcal{I}} (2\pi - \theta_i) + \sum_{i=1}^p (\pi - \theta_n(x_i))$. Hence $\sum_{i=1}^p (\pi - \theta_n(x_i)) = 2\pi - \sum_{i \in \mathcal{I}} (2\pi - \theta_i)$. The sequence $(\sum_{i=1}^p (\pi - \theta_n(x_i)))_{n \in \mathbb{N}}$ ω -converges to $\sum_{i=1}^p (\pi - \theta_{\omega}(x_i))$. Hence, $\sum_{i=1}^p (\pi - \theta_{\omega}(x_i)) = 2\pi - \sum_{i \in \mathcal{I}} (2\pi - \theta_i)$. Moreover, according to the remark preceding Lemma 3.4.24, the distance d_{ω} is locally Euclidean on $[B_n(z_n, \eta)]_{n \in \mathbb{N}}$, except at $[z_n]_{n \in \mathbb{N}}$. Hence, the point $[z_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is a conical singularity of angle $\theta \geq 0$, and by the Gauss-Bonnet formula applied to $[P_n]_{n \in \mathbb{N}}$, we have $2\pi = 2\pi - \theta - \sum_{i=1}^p (\pi - \theta_{\omega}(x_i))$, hence $\theta = 2\pi + \sum_{i \in \mathcal{I}} (\theta_i - 2\pi)$. \square

Hence, the set $[\widetilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}} - [\partial \widetilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is a surface endowed with a locally Euclidean metric with conical singularities of angles $k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ and $k \geq 3$, which is $\Gamma_{\widetilde{W}}$ -invariant by naturality. This ends the proof of Lemma 3.4.22. \square

Lemma 3.4.25 *The convex hull of $\bigcup_{\gamma \in H_{\widetilde{W}}} F(\gamma)$, minus the points $\star_{\tilde{c}}$, where \tilde{c} is a boundary component of \widetilde{W} (if any), is a surface without boundary, endowed with a locally Euclidean metric with conical singularities of angles of the form $k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ and $k \geq 3$, which is CAT(0) and $\Gamma_{\widetilde{W}}$ -equivariant. Moreover, the intersection of any translation axis of any hyperbolic element of Γ with $[\widetilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is contained in the convex hull of $\bigcup_{\gamma \in H_{\widetilde{W}}} F(\gamma)$, if it is not empty.*

Proof. There exists a finite set of free homotopy classes (relative to the boundary of W) of simple arcs of W joining some boundary components of W , having pairwise disjoint representatives, such that no arc is freely homotopic to an arc contained in a boundary component of W , and the union of some simple and pairwise disjoint representatives of these homotopy classes cuts W into a finite set of disks. Then, the union of all the lifts of these arcs in \widetilde{W} cuts \widetilde{W} into disks. We extend them into a set \widetilde{S} of pairwise disjoint proper biinfinite simple paths of $\widetilde{\Sigma}$ (possibly not in a Γ -equivariant way), that intersect the boundary of \widetilde{W} in exactly two points, such that every path cuts $\widetilde{\Sigma}$ into two connected components.



Let m be a hyperbolic metric on Σ and let \widetilde{m} be its pullback on $\widetilde{\Sigma}$. We consider the \widetilde{m} -geodesic representatives of the elements of \widetilde{S} , and we still denote by \widetilde{S} the corresponding set of pairwise disjoint biinfinite \widetilde{m} -geodesics. The elements of \widetilde{S} are pairwise disjoint, each geodesic $\widetilde{s} \in \widetilde{S}$ divides $\widetilde{W}_{\widetilde{m}}$ into two connected components, and the intersection of the union of the geodesics of \widetilde{S} with $\widetilde{W}_{\widetilde{m}}$ cuts $\widetilde{W}_{\widetilde{m}}$ into disks. Since the geodesics are pairwise disjoint, the disks can be labelled by the (unordered) sets of boundary components of $\widetilde{W}_{\widetilde{m}}$ that intersect their boundaries. We denote by $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ the closures of the connected complementary components of $(\bigcup \widetilde{S}) \cap \widetilde{W}_{\widetilde{m}}$ in $\widetilde{W}_{\widetilde{m}}$, that are (topological) disks. Let $n \in \mathbb{N}$. For every $\widetilde{s} \in \widetilde{S}$, let \widetilde{s}_n be a $[\widetilde{q}_n]$ -geodesic having the same (ordered) pair of points at infinity than \widetilde{s} . Since the geodesics \widetilde{s}_n are properly homotopic to the pairwise disjoint elements of \widetilde{S} , to each disk D_k , with $k \in \mathbb{N}$, corresponds a unique convex generalized disk $D_k(n)$ (i.e. a (possibly empty) disk with a finite number of spikes of finite length (possibly zero)), whose boundary is contained in $(\bigcup_{\widetilde{s} \in \widetilde{S}} \widetilde{s}_n) \cup \partial \widetilde{W}_n$. It may happen that $D_k(n)$ is a graph.

Let $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ and let $(x_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ and $(x_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$ be two sequences of points such that for all $n \in \mathbb{N}$, $x_{1,n}$ belongs to $D_{k_1}(n)$ and $x_{2,n}$ belongs to $D_{k_2}(n)$. Since every geodesic of \widetilde{S} cuts $\widetilde{W}_{\widetilde{m}}$ into two connected components, if the point x_1, x_2 belong respectively to D_{k_1} and D_{k_2} , there exists a finite sequence $(\widetilde{s}_i)_{i \in I}$ in \widetilde{S} , such that the \widetilde{m} -geodesic segment joining x_1 to x_2 cuts the geodesics $(\widetilde{s}_i)_{i \in I}$. Then, for all $n \in \mathbb{N}$, the geodesics $(\widetilde{s}_{i,n})_{i \in I}$ cut the geodesic segment joining $x_{1,n}$ to $x_{2,n}$ in \widetilde{W}_n into a bounded number of geodesic segments of finite lengths (several geodesics can be cut at the same time). Hence, the geodesic segment $[[x_{1,n}, x_{2,n}]]_{n \in \mathbb{N}}$ in $[\widetilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is the concatenation of a finite number of geodesic segments whose endpoints belong to $\bigcup_{i \in I} ([\widetilde{s}_{i,n}]_{n \in \mathbb{N}})$, hence it is contained in $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [D_k(n)]_{n \in \mathbb{N}}$. Therefore $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [D_k(n)]_{n \in \mathbb{N}}$ is convex.

Let us show that the union $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [D_k(n)]_{n \in \mathbb{N}}$ intersects $[\partial \widetilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ only at the points $\star_{\widetilde{c}}$, where \widetilde{c} is a boundary component of \widetilde{W} . For all $n \in \mathbb{N}$, if \widetilde{s}_n is a geodesic corresponding to an element $\widetilde{s} \in \widetilde{S}$, it is interlaced with two boundary components \widetilde{c} and \widetilde{c}' of \widetilde{W} , and its pair of points at infinity does not depend on n . Hence, there exists $\gamma \in \Gamma - \{e\}$ and $k \in \mathbb{Z}$ such that for all $n \in \mathbb{N}$, a translation axis $Ax_n(\gamma)$ of γ is interlaced with \widetilde{c}_n , and \widetilde{s}_n is caught between $\gamma_{\widetilde{c}}^{-k}(Ax_n(\gamma))$ and $\gamma_{\widetilde{c}}^k(Ax_n(\gamma))$, where $\gamma_{\widetilde{c}} \in \Gamma_{\widetilde{W}} - \{e\}$ preserves \widetilde{c} . Similarly, there exists $\gamma' \in \Gamma - \{e\}$ and $k' \in \mathbb{Z}$ such that for all $n \in \mathbb{N}$,

a translation axis $\text{Ax}_n(\gamma')$ of γ' is interlaced with \tilde{c}_n , and \tilde{s}_n is caught between $\gamma_{\tilde{c}}^{-k'}(\text{Ax}_n(\gamma'))$ and $\gamma_{\tilde{c}'}^{k'}(\text{Ax}_n(\gamma'))$, where $\gamma_{\tilde{c}} \in \Gamma_{\tilde{W}} - \{e\}$ preserves \tilde{c} . According to Lemma 3.4.2, the geodesic $[\tilde{s}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ can intersect $[\partial \tilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ only at the points $\star_{\tilde{c}}$ and $\star_{\tilde{c}'}$. Hence, the connex union $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [D_k(n)]_{n \in \mathbb{N}}$, minus the points $\star_{\tilde{c}}$, is contained in $[\tilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}} - [\partial \tilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$, and according to Lemma 3.4.22, it is a surface without boundary. Since it is convex, it is CAT(0) as $[\tilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$. Finally, it is naturally $\Gamma_{\tilde{W}}$ -invariant.

Let $\gamma \in H_{\tilde{W}}$. By the definition of \tilde{S} , there exists a sequence $(\tilde{s}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ of \tilde{S} that cuts the translation axis $\text{Ax}_{\tilde{m}}(\gamma)$ of γ in $\tilde{W}_{\tilde{m}}$ into bounded intervals. Then, for all $n \in \mathbb{N}$, if $\text{Ax}_n(\gamma)$ is a translation axis of γ in \tilde{W}_n , it is cut by the sequence of geodesics $(\tilde{s}_{i,n})_{i \in \mathbb{N}}$ into bounded intervals, and the order of the $(\tilde{s}_{i,n})_{i \in \mathbb{N}}$ does not depend on $n \in \mathbb{N}$ (it may happen that several geodesics are intersected at the same time). Hence, the geodesic $[\text{Ax}_n(\gamma)]_{n \in \mathbb{N}}$ is contained in $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [D_k(n)]_{n \in \mathbb{N}}$. Hence, all the (possibly degenerated) flat strips $F(\gamma)$, with $\gamma \in H_{\tilde{W}}$, are contained in $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [D_k(n)]_{n \in \mathbb{N}}$, and since $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [D_k(n)]_{n \in \mathbb{N}}$ is convex, the convex hull of $\bigcup_{\gamma \in H_{\tilde{W}}} F(\gamma)$ is contained in $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [D_k(n)]_{n \in \mathbb{N}}$. Moreover, since the convex hull of $\bigcup_{\gamma \in H_{\tilde{W}}} F(\gamma)$ is $\Gamma_{\tilde{W}}$ -equivariant, according to Lemma 3.1.6, it contains all the points $\star_{\tilde{c}}$, where \tilde{c} is a boundary component of \tilde{W} , hence it contains all the geodesic segments joining them, and notably the segments $[\tilde{s}_n]_{n \in \mathbb{N}} \cap [\tilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$, with $\tilde{s} \in \tilde{S}$. Hence, the convex hull of $\bigcup_{\tilde{s} \in \tilde{S}} [\tilde{s}_n]_{n \in \mathbb{N}} \cap [\tilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$, which is equal to $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [D_k(n)]_{n \in \mathbb{N}}$, is equal to the convex hull of $\bigcup_{\gamma \in H_{\tilde{W}}} F(\gamma)$.

Finally, if γ is a hyperbolic element of Γ whose translation axis $\text{Ax}_\omega(\gamma)$ in $\lim_\omega(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])$ intersects $[\tilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$, according to Lemma 3.4.2, there exists two boundary components \tilde{c} and \tilde{c}' of \tilde{W} such that the intersection $\text{Ax}_\omega(\gamma) \cap [\tilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is the segment $[\star_{\tilde{c}}, \star_{\tilde{c}'}]$, hence is contained in the convex hull of $\bigcup_{\gamma \in H_{\tilde{W}}} F(\gamma)$. \square

Lemma 3.4.26 *The locally Euclidean metric with conical singularities on \tilde{W}_ω is a half-translation structure $[\tilde{q}_\omega]$ on \tilde{W}_ω , that is the pullback of a half-translation structure $[\hat{q}_\omega]$ on a finite type surface \widehat{W}_ω homeomorphic to $\widehat{W} - \partial \widehat{W}$. Moreover, if $W \neq \Sigma$, $[\hat{q}_\omega]$ can be extended to the compact surface obtained from \widehat{W}_ω by filling in the punctures, with possibly some singular points of angle π at the added points.*

Proof. Let $x = [x_n]_{n \in \mathbb{N}}$ be a point of \tilde{W}_ω such that there exists $r > 0$ small enough, such that the (Euclidean) disk $D_\omega(x, 2r)$ does not contain any singular point. Then, there exists I in ω such that for all $n \in I$, the disk $D_n(x_n, r)$ in \tilde{W}_n does not contain any singular point of $[\tilde{q}_n]$. Let $x_1 = [x_{1,n}]_{n \in \mathbb{N}}$ and $x_2 = [x_{2,n}]_{n \in \mathbb{N}}$ be two points of $D_\omega(x, r)$, and let $r_1, r_2 > 0$ be such that the disks $D_\omega(x_1, r_1)$ and $D_\omega(x_2, r_2)$ are contained in $D_\omega(x, r)$. We can always assume that the distance $d_n(x_{1,n}, x_{2,n})$ is constant for all $n \in \mathbb{N}$. For all $n \in I$, let $\psi_{i,n} : D_n(x_{i,n}, r_1) \rightarrow \mathbb{D}(0, r_i)$ (with $i = 1, 2$, where $\mathbb{D}(0, r_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r_i\}$) be the inverse of an exponential map at $x_{i,n}$. Then, if $r_1 + r_2 < d_\omega(x_1, x_2)$, for ω -almost all $n \in \mathbb{N}$, there exists $c_n \in \mathbb{C}$ such that the restriction of $\psi_{2,n} \circ \psi_{1,n}^{-1}$ to $\psi_{1,n}(D_n(x_{1,n}, r_1) \cap D_n(x_{2,n}, r_2))$ is either $z \mapsto z + c_n$ or $z \mapsto -z + c_n$. Moreover, we have $|c_n| = d_n(x_{1,n}, x_{2,n})$, hence the sequence $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ω -converges to $c \in \mathbb{C}$. Let us define the isometry $\psi_{i,\omega} : D_\omega(x_i, r_i) \rightarrow \mathbb{D}(0, r_i)$ by $\psi_{i,\omega}([w_n]_{n \in \mathbb{N}}) = \lim_\omega \psi_{i,n}(w_n)$ ($i \in \{1, 2\}$). Then, the restriction of $\psi_{2,\omega} \circ \psi_{1,\omega}^{-1}$ to $\psi_{1,\omega}(D_\omega(x_1, r_1) \cap D_\omega(x_2, r_2))$ is either $z \mapsto z + c$ or $z \mapsto -z + c$.

Hence, the set of maps thus defined spans a maximal atlas of charts on the complement of the singular points in \tilde{W}_ω , such that the exchange maps are of the form $z \mapsto \pm z + c$, with $c \in \mathbb{C}$. Since the

singular points are of angles $k\pi$, with $k \in \mathbb{N}$ and $k \geq 3$, it defines a half-translation structure $[\hat{q}_\omega]$ on \widehat{W}_ω . This half-translation structure is naturally $\Gamma_{\widehat{W}}$ -invariant, and since \widehat{W}_ω is simply connected and the action of $\Gamma_{\widehat{W}}$ is properly discontinuous, it defines a half-translation structure $[\hat{q}_\omega]$ on the surface $\widehat{W}_\omega = \Gamma_{\widehat{W}} \backslash \widehat{W}$. Moreover, since $\Gamma_{\widehat{W}}$ is finitely generated, the surface \widehat{W}_ω is of finite type. Let us prove that \widehat{W}_ω is homeomorphic to $\widehat{W} - \partial\widehat{W}$. Since $\Gamma_{\widehat{W}}$ has b conjugation classes of parabolic elements (b is the number of boundary components of \widehat{W}), the surface \widehat{W}_ω has b punctures. Moreover, the surface \widehat{W}_ω is orientable, and two translation axes of two elements γ_1 and γ_2 of $H_{\widehat{W}}$ in \widehat{W}_ω are not interlaced if and only if the translation axes of γ_1 and γ_2 are not interlaced in \widehat{W}_n , for any $n \in \mathbb{N}$. Hence, the cardinality of a maximal set of isotopy classes of essential simple closed curves of \widehat{W}_ω having pairwise disjoint representatives is equal to the cardinality of a maximal set of isotopy classes of simple closed curves having pairwise disjoint representatives of \widehat{W} . Hence, the Euler characteristics of \widehat{W}_ω and of \widehat{W} are equal, and since \widehat{W}_ω has b punctures, the surfaces \widehat{W}_ω and \widehat{W} have the same genus. Hence, \widehat{W}_ω is homeomorphic to $\widehat{W} - \partial\widehat{W}$.

The complex structure defined by $[\hat{q}_\omega]$ on \widehat{W}_ω can be extended to the compact surface without puncture obtained from \widehat{W}_ω by filling in the punctures. Let a be a puncture of \widehat{W}_ω , and let (U, z) be a chart of the extended complex structure, with $a \in U$. Let $\hat{q}_\omega \in \mathcal{Q}(\widehat{W}_\omega)$ be a representative of $[\hat{q}_\omega]$. We define the holomorphic map φ on $U - \{a\}$ by $\varphi(x) = \hat{q}_{\omega,1}(x)(\frac{dz_1}{dz})^2$, for any chart (U_1, z_1) of \widehat{W}_ω such that x belongs to U_1 , where $\hat{q}_{\omega,1}$ is the representative of \hat{q}_ω in (U_1, z_1) . Let \tilde{a} be the fixed point of an elliptic element $\gamma_{\tilde{a}} \in \Gamma_{\widehat{W}} - \{e\}$ in the completion of \widehat{W}_ω , such that the free homotopy class of closed curves defined by $\gamma_{\tilde{a}}$ in \widehat{W}_ω as some representatives contained in any neighborhood of a . Let x be a point of \widehat{W}_ω , close enough to \tilde{a} (for the distance d_ω). Then, by the isoperimetric inequality (see for example [BH, Thm. 2.17 p. 426]), the angle sector, bounded by $[\tilde{a}, x]$, and $[\tilde{a}, \gamma_{\tilde{a}}x]$ has a finite area. Moreover, it projects to a closed neighborhood of a in \widehat{W}_ω , whose $[\hat{q}_\omega]$ -area is finite since the cover projection does not increase the area. Hence, the integral of $|\varphi|$ on a closed neighborhood of a is finite, and φ can be extended to a meromorphic function, with at most a simple pole in a . Hence, the half-translation structure $[\hat{q}_\omega]$ on the compact surface with punctures \widehat{W}_ω can be extended to a half-translation structure on the compact surface, possibly with singularities of angle π at the punctures. \square

3.4.7 Complementary components of Σ_0 which are cylinders or pair of pants.

It remains to study the ultralimits of the geometric realizations of the connected components of the preimages in $\tilde{\Sigma}$ of the connected components of Σ_0 and of $\Sigma - \Sigma_0$ which are pair of pants or cylinders, and of the cylinders that can be homotoped to a boundary component of Σ_0 .

Let α be the free homotopy class of closed curves of a boundary component of Σ_0 , and let $\tilde{\alpha}$ be a lift of α in $\tilde{\Sigma}$. For all $n \in \mathbb{N}$, we denote by F_n the (possibly degenerated) flat strip, union of all the geodesics of $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])$ having the same pair of points at infinity than $\tilde{\alpha}$. The ultralimit $[F_n]_{n \in \mathbb{N}}$ exists and can be neither a plane nor a half-plane, since the height of F_n is bounded, hence it is either a flat strip or a single geodesic. According to Remark 3.4.1, it is the set of fixed points in $\lim_\omega (\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])_{n \in \mathbb{N}}$ of the elements of the stabilizer of $\tilde{\alpha}$ in Γ , and according to Lemma 3.4.2, the intersection of any translation axis of any hyperbolic element of Γ with $[F_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is either empty, or a point, or a geodesic segment orthogonal to the boundary components of the flat strip $[F_n]_{n \in \mathbb{N}}$.

Assume until the end of this section that W is the closure of a connected component of $\Sigma - \Sigma_0$ which is a pair of pants.

Lemma 3.4.27 *The ultralimit $[\widehat{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is an \mathbb{R} -tree and the action of $\Gamma_{\widehat{W}}$ on $[\widehat{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ has a global fixed point $\star_{\widehat{W}}$ which is equal to $\star_{\widetilde{c}}$ for every boundary component \widetilde{c} of \widehat{W} (see the lines following the statement of Lemma 3.4.2 for the definition).*

Proof. Let $\widehat{c}_1, \widehat{c}_2$ and \widehat{c}_3 be the homotopy classes of the boundary components of \widehat{W} . Let $n \in \mathbb{N}$. Assume for a contradiction that the boundary components of \widehat{W}_n are pairwise disjoint. According to [Raf, Rem. 3.2], the interior curvature of any boundary component of \widehat{W}_n is at most $-\pi$. Hence, according to the Gauss-Bonnet formula, we should have $2\pi\chi(\widehat{W}) \leq -3\pi$, which is impossible since $\chi(\widehat{W}) = -1$. Hence, up to changing the notation, for ω -almost all $n \in \mathbb{N}$, we can assume that the boundary components $\widehat{c}_{1,n}$ and $\widehat{c}_{2,n}$ of \widehat{W}_n , corresponding to \widehat{c}_1 and \widehat{c}_2 , intersect each other. The geodesic $\widehat{c}_{3,n}$ either intersects the union of the other ones, or is disjoint from the union of the other ones, and the interior of \widehat{W}_n is a cylinder. In the second case, the union $\widehat{c}_{1,n} \cup \widehat{c}_{2,n}$ contained a simple closed curve isotopic to $\widehat{c}_{3,n}$, and according to Lemma 3.2.7, there exists a point in $\widehat{c}_{1,n} \cup \widehat{c}_{2,n}$ at distance of $\widehat{c}_{3,n}$ at most $(\ell_{[\widehat{q}_n]}(\widehat{c}_{1,n}) + \ell_{[\widehat{q}_n]}(\widehat{c}_{2,n}))$, and \widehat{W}_n can be cut into a disk of perimeter at most $2(\ell_{[\widehat{q}_n]}(\widehat{c}_{1,n}) + \ell_{[\widehat{q}_n]}(\widehat{c}_{2,n})) + (\ell_{[\widehat{q}_n]}(\widehat{c}_{1,n}) + \ell_{[\widehat{q}_n]}(\widehat{c}_{2,n})) + \ell_{[\widehat{q}_n]}(\widehat{c}_{3,n}) \leq 4(\ell_{[\widehat{q}_n]}(\widehat{c}_{1,n}) + \ell_{[\widehat{q}_n]}(\widehat{c}_{2,n}))$. In both cases, the diameter of \widehat{W}_n is at most $4(\ell_{[\widehat{q}_n]}(\widehat{c}_{1,n}) + \ell_{[\widehat{q}_n]}(\widehat{c}_{2,n}))$ and its area is at most $\pi(4(\ell_{[\widehat{q}_n]}(\widehat{c}_{1,n}) + \ell_{[\widehat{q}_n]}(\widehat{c}_{2,n})))^2$. Since we have $\lim_{\omega} \ell_{[\widehat{q}_n]}(\widehat{c}_{i,n}) = 0$ for $i = 1, 2, 3$, the set S of Lemma 3.4.7 corresponding to \widehat{W} is empty, and according to Lemma 3.4.8 applied with $M = \widehat{W}$, the ultralimit $[\widehat{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is an \mathbb{R} -tree. Moreover, there exist some homotopy classes of arcs joining the boundary components of \widehat{W} , whose $[\widehat{q}_n]$ -lengths ω -converge to zero. As in the proof of Lemma 3.4.12, the action of $\Gamma_{\widehat{W}}$ has a global fixed point $\star_{\widehat{W}}$ which is equal to $\star_{\widetilde{c}}$ for every boundary component \widetilde{c} of \widehat{W} . \square

3.5 Mixed structures.

Let Σ be a compact, connected, orientable surface, such that $\chi(\Sigma) < 0$, and let $p : \widetilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ be a universal cover with covering group Γ . We assume for simplicity that the boundary of Σ is empty, but many results can be easily extended to a surface with non empty boundary. Let Σ_0 be a tight proper subsurface of Σ , and let $\widetilde{\Sigma}_0$ be its preimage in $\widetilde{\Sigma}$. If \widehat{W} is a connected component of $\widetilde{\Sigma}_0$ or of $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Sigma}_0$, we denote by $\Gamma_{\widehat{W}}$ the stabilizer of \widehat{W} in Γ .

Let W be a connected component of $\Sigma - \Sigma_0$ and let \widetilde{W} be a connected component of the preimage of W in $\widetilde{\Sigma}$. Assume first that W is neither a cylinder nor a pair of pants. Let T_{Λ} be the \mathbb{R} -tree dual to a measured hyperbolic lamination (Λ, μ) on W (for any complete hyperbolic metric).

Lemma 3.5.1 *If Λ is filling, the stabilizers of the boundary components of \widetilde{W} have a unique fixed point in T_{Λ} . The other elements have no fixed point.*

Proof. Let \widetilde{c} be a boundary component of \widetilde{W} and let $\gamma_{\widetilde{c}}$ be a primitive element of the stabilizer of \widetilde{c} in Γ . Let $\widetilde{\Lambda}$ be the preimage of Λ in $\widetilde{\Sigma}$. If $\widetilde{\lambda}$ is a leaf of $\widetilde{\Lambda}$ that lies in the boundary of the same connected component of $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Lambda}$ as \widetilde{c} , then there exists a piecewise \mathcal{C}^1 arc joining $\widetilde{\lambda}$ to $\gamma_{\widetilde{c}}(\widetilde{\lambda})$ that does not meet any leaf of $\widetilde{\Lambda}$. Hence, the image of $\widetilde{\lambda}$ in T_{Λ} is a fixed point of $\gamma_{\widetilde{c}}$. Moreover, if $\widetilde{\lambda}'$ is another leaf that lies in the boundary of the same connected component of $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Lambda}$ as \widetilde{c} , similarly $\widetilde{\lambda}$ and $\widetilde{\lambda}'$ have the same image in T_{Λ} . Finally, if $\widetilde{\lambda}$ is a leaf that does not lie in the boundary of the same connected component of $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Lambda}$ than \widetilde{c} , there exists a set of leaves of $\widetilde{\Lambda}$ such that all the

piecewise \mathcal{C}^1 arcs, transverse to $\tilde{\Lambda}$, that join $\tilde{\lambda}$ to $\gamma_{\tilde{c}}(\tilde{\lambda})$, intersect transversally (at least) this set of leaves, and hence have their total masses (for the transverse measure) uniformly bounded below by a positive constant. Hence, the action of $\gamma_{\tilde{c}}$ on T_{Λ} has a unique fixed point.

Let $\gamma \in \Gamma$ that does not preserve any boundary component of \tilde{W} , and let α_{γ} be the free homotopy class of closed curves of Σ defined by γ . Then α_{γ} is essential in W , and since Λ is filling, we have $\ell_{T_{\Lambda}}(\gamma) = i(\alpha_{\gamma}, (\Lambda, \mu)) > 0$. Hence, γ is hyperbolic. \square

The surface W is a finite type surface. Let $[q_W]$ be a half-translation structure on W , that can be extended to the compact surface obtained from W by filling in the punctures, with possibly some singularities of angle π at the added point. Let $p_W : (\tilde{W}, [\tilde{q}_W]) \rightarrow (W, [q_W])$ be a universal cover. Then $(\tilde{W}, [\tilde{q}_W])$ is not complete.

Lemma 3.5.2 *The completion \tilde{W}^c of $(\tilde{W}, [\tilde{q}_W])$ is the union of \tilde{W} and of countably many isolated points which are exactly the fixed points of the stabilizers of the boundary components of \tilde{W} in $\Gamma_{\tilde{W}}$.*

Definition 3.5.1 (see [DS, Def. 1.10]) *A tree-graded space is the data consisting of a complete geodesic metric space (X, d) and a collection \mathcal{P} of closed geodesic subsets of X (called pieces), covering X , such that :*

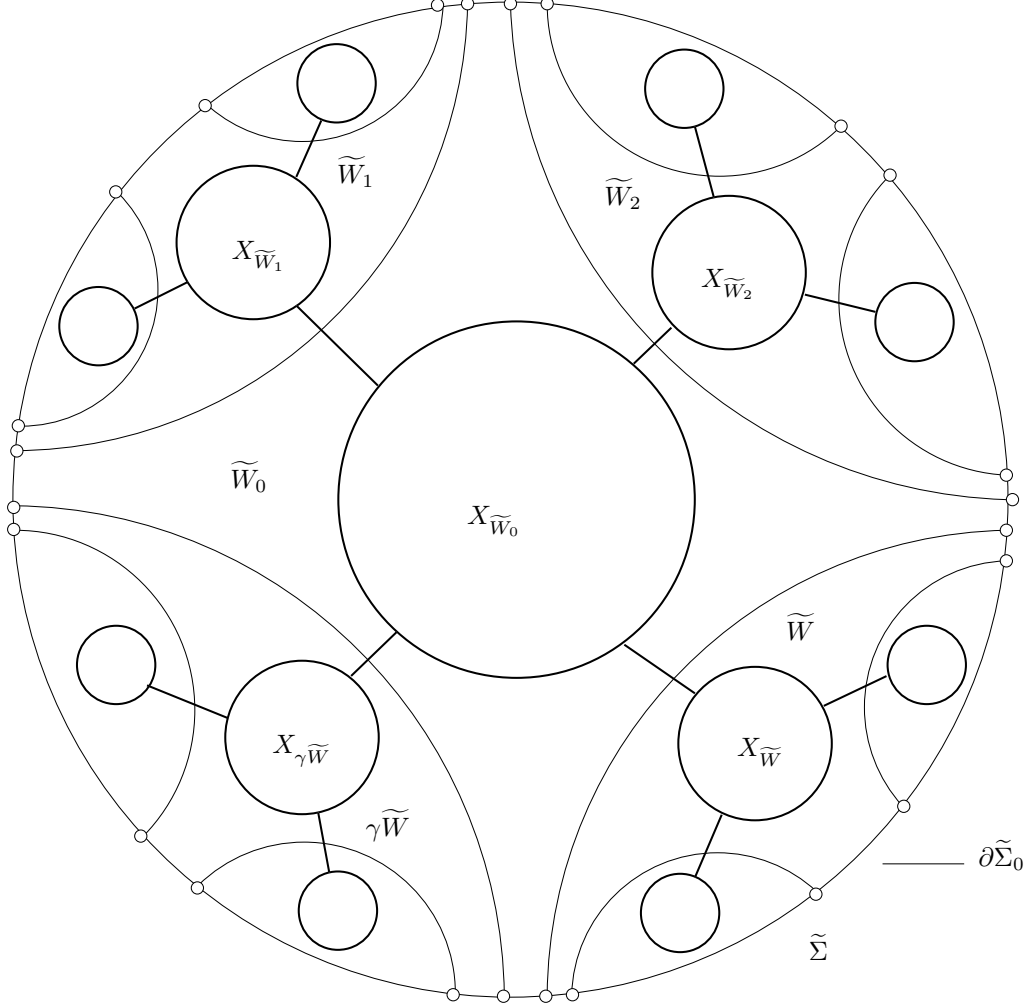
- every two different pieces have at most one common point ;
- every simple geodesic triangle (i.e. a simple loop composed of three geodesic segments) in X is contained in one piece.

Let $\tilde{\Sigma}_0$ be as above. Let \tilde{W} be a connected component of $\tilde{\Sigma}_0$ or of $\tilde{\Sigma} - \tilde{\Sigma}_0$. Let $X_{\tilde{W}}$ be a complete geodesic metric space endowed with an isometric action of the stabilizer $\Gamma_{\tilde{W}}$ of \tilde{W} in Γ , such that :

- [1] if \tilde{W} is a strip, $X_{\tilde{W}}$ is empty ;
- [2] if \tilde{W} is a connected component of $\tilde{\Sigma}_0$, which is not a strip, $X_{\tilde{W}}$ is a point, and the action of $\Gamma_{\tilde{W}}$ on $X_{\tilde{W}}$ is trivial ;
- [3] if \tilde{W} is a connected component of $\tilde{\Sigma} - \tilde{\Sigma}_0$ such that $W = p(\tilde{W})$ is neither a cylinder nor a pair of pants, $X_{\tilde{W}}$ is either the \mathbb{R} -tree dual to a filling measured hyperbolic lamination (Λ, μ) of W (for any complete hyperbolic metric), and then the action of $\Gamma_{\tilde{W}}$ on $X_{\tilde{W}}$ is dual to (Λ, μ) , or $X_{\tilde{W}}$ is the completion of a universal cover of a half-translation structure on W , that can be extended to a half-translation structure on the compact surface obtained from W by filling in the punctures, with possibly some singularities of angle π at the added points, and then the action of $\Gamma_{\tilde{W}}$ on $X_{\tilde{W}}$ is the covering action, extended at the added points ;
- [4] if \tilde{W} is a connected component of $\tilde{\Sigma} - \tilde{\Sigma}_0$ such that $W = p(\tilde{W})$ is a pair of pants, $X_{\tilde{W}}$ is a point, and the action of $\Gamma_{\tilde{W}}$ on $X_{\tilde{W}}$ is trivial.

Finally, for every proper homotopy class of a boundary component \tilde{c} of $\tilde{\Sigma}_0$ (two boundary components of $\tilde{\Sigma}_0$ can be properly homotopic because of the strips), let $X_{\tilde{c}}$ be an edge (i.e. a compact interval of \mathbb{R} , possibly reduced to a point). We assume that if \tilde{c} bounds a connected component of $\tilde{\Sigma} - \tilde{\Sigma}_0$ which is a strip, the length of this edge is nonzero and if \tilde{W} is a connected component of $\tilde{\Sigma} - \tilde{\Sigma}_0$ whose image in Σ is a pair of pants, then there exists at least one boundary component \tilde{c} of \tilde{W} such that the length of $X_{\tilde{c}}$ is nonzero. We endow $X_{\tilde{c}}$ with the trivial action of $\Gamma_{\tilde{c}}$. Moreover,

if \widetilde{W} and \widetilde{W}' are the connected components of $\widetilde{\Sigma}_0$ or of $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Sigma}_0$ bounded by \widetilde{c} , we identify the fixed points of $\Gamma_{\widetilde{c}}$ in $X_{\widetilde{W}}$ and $X_{\widetilde{W}'}$ (which exist and are unique if $X_{\widetilde{W}}$ and $X_{\widetilde{W}'}$ are not empty, according to Lemmas 3.5.1 and 3.5.2) with the (possibly non distinct) endpoints of $X_{\widetilde{c}}$.



Definition 3.5.2 *The topological space (X, d) obtained by this gluing, endowed with the length distance induced by the distances on the different metric spaces is called a mixed structure.*

We identify the metric spaces $X_{\widetilde{W}}$, and $X_{\widetilde{c}}$ with their images in X . The actions of the stabilizers $\Gamma_{\widetilde{W}}$ and $\Gamma_{\widetilde{c}}$ above extend uniquely in an isometric action of Γ by setting $\gamma(X_{\star}) = X_{\gamma\star}$ for every $\gamma \in \Gamma$, where \star is a connected component of $\widetilde{\Sigma}_0$ or of $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Sigma}_0$, or a boundary component of $\widetilde{\Sigma}_0$. If Γ acts on a CAT(0) geodesic space X , and if Γ' is a subgroup of Γ , if there exists a unique minimal non empty closed convex subset of X which is preserved by Γ' , it is called the *convex core* of Γ' . By definition of the action of Γ on X , we see that if \widetilde{W} is a connected component of $\widetilde{\Sigma}_0$ or of $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Sigma}_0$, then the convex core of $\Gamma_{\widetilde{W}}$ in X is $X_{\widetilde{W}}$, and if \widetilde{c} is a boundary component of $\widetilde{\Sigma}_0$, the set of fixed points of $\Gamma_{\widetilde{c}}$ in X is $X_{\widetilde{c}}$. The elements of Γ that have a fixed point in X are those that preserve a connected component of $\widetilde{\Sigma}_0$ or a connected component of $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Sigma}_0$ whose image in Σ is a pair of pants. The other elements are hyperbolic. Moreover, if $\gamma \in \Gamma$ is a hyperbolic element in X , it can

have more than one translation axis only if it preserves a piece which is the completion of a surface endowed with a half-translation structure.

Lemma 3.5.3 *The space (X, d) just defined is a CAT(0) tree-graded space, whose set of pieces are the spaces $X_{\widetilde{W}}$ and $X_{\widetilde{c}}$ as above, which is uniquely determined by the half-translation structures and by the measured hyperbolic laminations on the connected components of $\Sigma - \Sigma_0$, and by the lengths of the edges corresponding to the boundary components of $\widetilde{\Sigma}_0$, up to Γ -equivariant isometry. Moreover, the action of Γ on X determines uniquely the subsurface Σ_0 (up to isotopy), the measured hyperbolic laminations (up to isotopy) and the half-translation structures (up to isometry), on the connected components of $\Sigma - \Sigma_0$.*

Remark. Recall that Σ_0 is proper in Σ , and by construction, the space X is not reduced to a point, and the action of Γ on X has no global fixed point.

Proof. According to the construction, two distinct pieces Y and Y' have at most one common point x which is then a fixed point of the stabilizer $\Gamma_{\widetilde{c}}$ of a boundary component \widetilde{c} of $\widetilde{\Sigma}_0$ in Γ . Moreover, the boundary component \widetilde{c} cuts $\widetilde{\Sigma}$ into two connected components, and if \widetilde{W} and \widetilde{W}' are two connected components of $\widetilde{\Sigma}_0$ or of $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Sigma}_0$ that are not contained in the same connected component of $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{c}$, then there exists no common point between the pieces $X_{\widetilde{W}}$ and $X_{\widetilde{W}'}$, except possibly x . Hence, any simple loop of X is contained in a unique piece, and since all the pieces are simply connected, the space X is simply connected. Moreover, it is clearly locally CAT(0) and hence globally CAT(0). And any simple geodesic triangle is contained in a unique piece, hence (X, d) is a tree-graded space.

We now show that the action of Γ on (X, d) determines Σ_0 , up to isotopy. Let Z be a non trivial π_1 -injective closed connected subsurface of Σ and let \widetilde{Z} be a connected component of the preimage of Z in $\widetilde{\Sigma}$. Assume that the stabilizer $\Gamma_{\widetilde{Z}}$ of \widetilde{Z} in Γ is neither trivial nor cyclic, and preserves a unique point $\star_{\widetilde{Z}}$ in X . We can always assume that Z is not a proper subsurface of a bigger subsurface having this property. Then, all the elements of $\Gamma_{\widetilde{Z}}$ preserve a connected components of $\widetilde{\Sigma}_0$ or of $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Sigma}_0$ whose image in Σ is a pair of pants. Hence Z is either a connected component of Σ_0 or the closure of a connected component of $\Sigma - \Sigma_0$ which is a pair of pants. Since no connected component of Σ_0 is a pair of pants, in the first case, the group $\Gamma_{\widetilde{Z}}$ is either a free group of rank at least 3, or if Z is a torus minus a disk, $\Gamma_{\widetilde{Z}}$ is a free group of rank 2. In that case, all the boundary components of \widetilde{Z} belong to the same $\Gamma_{\widetilde{Z}}$ -orbit. Moreover, if \widetilde{c} is a boundary component of $\widetilde{\Sigma}_0$ and A is a connected component of $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{c}$, then the image of the union of the pieces corresponding to the connected components of $\widetilde{\Sigma}_0$ or of $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Sigma}_0$, contained in A , by $\gamma \in \Gamma_{\widetilde{Z}}$, is the union of the pieces corresponding to the connected components of $\widetilde{\Sigma}_0$ or of $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Sigma}_0$, contained in $\gamma(A)$. Hence, in that case, the action of $\Gamma_{\widetilde{Z}}$ on the connected components of $X - \{\star_{\widetilde{Z}}\}$ has a unique orbit. In the case where Z is a pair of pants, the group $\Gamma_{\widetilde{Z}}$ is a free group of rank 2 and there are three $\Gamma_{\widetilde{Z}}$ -orbits of boundary components of \widetilde{Z} . Hence, as above, the action of $\Gamma_{\widetilde{Z}}$ on the connected components of $X - \{\star_{\widetilde{Z}}\}$ has three orbits.

Conversely, if Z is a connected component of Σ_0 which is not a cylinder, then $\Gamma_{\widetilde{Z}}$ is neither trivial nor cyclic, it fixes a point $\star_{\widetilde{Z}}$ in X , either $\Gamma_{\widetilde{Z}}$ is a free group of rank at least 3 or a free group of rank 2 and the action of $\Gamma_{\widetilde{Z}}$ on $X - \{\star_{\widetilde{Z}}\}$ has one orbit, and Z is maximal (for the inclusion) for these properties. Hence, the connected components of Σ_0 which are not cylinder are exactly the connected closed subsurface of Σ whose stabilizers of the connected components of the preimage in $\widetilde{\Sigma}$ satisfy these properties, and the action of Γ on (X, d) determines the connected components of Σ_0 which are not cylinders, up to isotopy.

Let us show that the action of Γ on X determines the cylinder components of Σ_0 . No cylinder connected component of Σ_0 can be homotoped to a boundary component of another connected component of Σ_0 . Hence, if Z is a cylinder component of $\Sigma - \Sigma_0$, it is not bounded by a cylinder component of Σ_0 but by two connected components of Σ_0 whose Euler characteristics are negative. And Z is a cylinder component of Σ_0 if and only if $\Gamma_{\tilde{Z}}$ is cyclic and pointwise preserves an edge (possibly reduced to a point) in X and Z is not a connected component of $\Sigma - \Sigma_0$. Hence, the action of Γ on (X, d) determines the cylinder components of Σ_0 , up to isotopy.

Let us show that the action of Γ on X determines the half-translation structures and the measured hyperbolic laminations, on the connected components of $\Sigma - \Sigma_0$ that are neither a cylinder nor a pair of pants. Let \tilde{W} be such a connected component of $\tilde{\Sigma} - \tilde{\Sigma}_0$. If the piece $X_{\tilde{W}}$ is the \mathbb{R} -tree dual to a measured hyperbolic lamination (Λ, μ) , then (Λ, μ) is determined (up to isotopy) by the set of translation distances of the elements of $\Gamma_{\tilde{W}}$ (see [Bon2]). If $X_{\tilde{W}}$ is the completion of $(\tilde{W}, [\tilde{q}_{\tilde{W}}])$ as above, then $(W, [q_W]) = (\tilde{W}, [\tilde{q}_{\tilde{W}}])/\Gamma_{\tilde{W}}$ is determined by the action of $\Gamma_{\tilde{W}}$ on $(\tilde{W}, [\tilde{q}_{\tilde{W}}])$.

Let us show that the space (X, d) and the action of Γ are determined by the data of Σ_0 , of the half-translation structures and the measured hyperbolic laminations on the connected components of $\Sigma - \Sigma_0$ that are neither a cylinder nor a pair of pants, and by the lengths of the edges, up to Γ -equivariant isometry. Assume that (X, d) and (X', d') correspond to two constructions as above, with the same subsurface Σ_0 , the same half-translation structures and measured hyperbolic laminations on the connected components of $\Sigma - \Sigma_0$ that are not pair of pants, and the same lengths of the edges. Let \tilde{W} be a connected component of $\tilde{\Sigma} - \tilde{\Sigma}_0$ that is not a pair of pants. Then, if the piece $X_{\tilde{W}}$ is the completion of the universal cover of $(W, [q_W])$, it is determined by $(W, [q_W])$ up to a $\Gamma_{\tilde{W}}$ -equivariant isometry. Similarly, if $X_{\tilde{W}}$ is the \mathbb{R} -tree dual to a measured hyperbolic lamination (Λ, μ) , it is determined by (Λ, μ) up to a $\Gamma_{\tilde{W}}$ -equivariant isometry. In both cases, the map that associates to the fixed point of a non trivial elliptic element $\gamma \in \Gamma_{\tilde{W}}$ in the piece $X_{\tilde{W}}$ of X , the fixed point of γ in the piece $X'_{\tilde{W}}$ of X' (the fixed points exist and are unique according to Lemmas 3.5.1 and 3.5.2), extends in a unique way into a $\Gamma_{\tilde{W}}$ -equivariant isometry. Hence, the map Φ from the sets of fixed points of the non trivial elliptic elements of Γ in X to X' , which associates to the set of fixed point(s) of a non trivial elliptic element $\gamma \in \Gamma - \{e\}$ in X , the set of fixed point(s) of γ in X' , extends in a unique way in an isometry, that defines an $\Gamma_{\tilde{W}}$ -equivariant isometry between $X_{\tilde{W}}$ and $X'_{\tilde{W}}$, for every connected component \tilde{W} of $\tilde{\Sigma}_0$ or of $\tilde{\Sigma} - \tilde{\Sigma}_0$, and since $\gamma(X_\star) = X_{\gamma\star}$, and $\gamma(X'_\star) = X'_{\gamma\star}$ for every $\gamma \in \Gamma$, the global isometry is Γ -equivariant. \square

Let $\gamma \in \Gamma - \{e\}$ and let α_γ be the free homotopy class of closed curves defined by γ in Σ . Let W be a non trivial π_1 -injective connected (open) subsurface of Σ . We identify α_γ and W with their geodesic representative and geodesic realization, for any hyperbolic metric on Σ , and we denote by $\alpha_{\gamma, W}$ the closed curve or the union of essential arcs between two (possibly equal) punctures of W , which is the intersection of α_γ and W . We still denote by $\alpha_{\gamma, W}$ the isotopy class (relative to the punctures) of $\alpha_{\gamma, W}$ in W (that does not depend on the choice of the hyperbolic metric). If W is endowed with a half-translation structure $[q_W]$ as above, let $\ell_{[q_W]}$ be the length of a $[q_W]$ -geodesic representative of α_W .

Let (X, \mathcal{P}) be a mixed structure on Σ , and let m be a hyperbolic metric on Σ . Let (Λ, μ) be the union of the measured hyperbolic laminations on Σ which are dual to the \mathbb{R} -tree pieces (Λ has no closed leaf), let c_1, \dots, c_n be the boundary components of Σ_0 , and let $t_1, \dots, t_n \in [0; +\infty[$ be the lengths of the corresponding edges in (X, d) . For every $\gamma \in \Gamma - \{e\}$, let $\ell_{[q]}(\alpha_\gamma)$ be the sum of the

lengths $\ell_{[q_W]}(\alpha_{\gamma,W})$ of the geodesic representatives of the arcs $\alpha_{\gamma,W}$, associated with the different pieces as above.

Lemma 3.5.4 *For every $\gamma \in \Gamma - \{e\}$, the translation length of γ in (X, d) is $\ell_X(\gamma) = i((\Lambda, \mu), \alpha_\gamma) + \ell_{[q]}(\alpha_\gamma) + \sum_{i=1}^n t_i i(c_i, \alpha_\gamma)$.*

Proof. Let $\gamma \in \Gamma - \{e\}$. Assume first that γ belongs to the stabilizer $\Gamma_{\widetilde{W}}$ of a connected component \widetilde{W} of $\widetilde{\Sigma}_0$ or of $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Sigma}_0$. Let $W = p(\widetilde{W})$ and let $X_{\widetilde{W}}$ be the piece preserved by $\Gamma_{\widetilde{W}}$. If $X_{\widetilde{W}}$ is a point, then $\ell_X(\gamma) = 0$, and since W is a connected component of Σ_0 or a pair of pants in $\Sigma - \Sigma_0$, we have $i((\Lambda, \mu), \alpha_\gamma) + \ell_{[q]}(\alpha_\gamma) + \sum_{i=1}^n t_i i(c_i, \alpha_\gamma) = 0$. If $X_{\widetilde{W}}$ is the dual tree to a measured hyperbolic lamination (Λ', μ') on W , then $\ell_X(\gamma) = i((\Lambda', \mu'), \alpha_\gamma) = i((\Lambda, \mu), \alpha_\gamma) + \ell_{[q]}(\alpha_\gamma) + \sum_{i=1}^n t_i i(c_i, \alpha_\gamma)$. Similarly, if $X_{\widetilde{W}}$ is the completion of a universal cover of $(W, [q_W])$ as above, then $\ell_X(\gamma) = \ell_{[q_W]}(\alpha_\gamma) = i((\Lambda, \mu), \alpha_\gamma) + \ell_{[q]}(\alpha_\gamma) + \sum_{i=1}^n t_i i(c_i, \alpha_\gamma)$.

Assume next that γ does not preserve any piece. We replace (X, d) by the space (X', d') obtained by replacing the edges of length t_i (possibly equal to 0), with $i \in \{1, \dots, n\}$, by edges of length $t_i + 1$.

Then, according to the picture above, the quotient of (X', d') by the equivalence relation $x \sim y$ if and only if x, y belong to the same piece which is not an edge, is the (simplicial) tree T dual to the multicurve $((t_i + 1)c_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$. Let $\text{Ax}_{\widetilde{m}}(\gamma)$ be the translation axis of γ in $(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{m})$ and let $\widetilde{W}_0, \widetilde{W}_1, \dots, \widetilde{W}_k$ ($k \in \mathbb{N}$), be the connected components of $\widetilde{\Sigma}_0$ and of $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Sigma}_0$, that are successively intersected by a fundamental domain of $\text{Ax}_{\widetilde{m}}(\gamma)$, for the action of $\gamma^{\mathbb{Z}}$, starting at a boundary component \widetilde{c} of $\widetilde{\Sigma}_0$. Then, the translation axis of γ in T has a fundamental domain (for the action of $\gamma^{\mathbb{Z}}$) starting at an endpoint of the edge pointwise preserved by the stabilizer $\Gamma_{\widetilde{c}}$ of \widetilde{c} in Γ , that successively meets the vertices preserved by $\Gamma_{\widetilde{W}_0}, \Gamma_{\widetilde{W}_1}, \dots, \Gamma_{\widetilde{W}_k}$. By the definition of T , the translation axis of γ in X' (which is unique since it is not contained in a piece) has a fundamental domain that starts at an endpoint of the edge pointwise preserved by $\Gamma_{\widetilde{c}}$, and successively meets the pieces $X_{\widetilde{W}_0}, X_{\widetilde{W}_1}, \dots, X_{\widetilde{W}_k}$ preserved by $\Gamma_{\widetilde{W}_0}, \Gamma_{\widetilde{W}_1}, \dots, \Gamma_{\widetilde{W}_k}$. Hence, by addition, we have $\ell_{X'}(\gamma) = i((\Lambda, \mu), \alpha_\gamma) + \ell_{[q]}(\alpha_\gamma) + \sum_{i=1}^n (t_i + 1)i(c_i, \alpha_\gamma)$, and then $\ell_X(\gamma) = i((\Lambda, \mu), \alpha_\gamma) + \ell_{[q]}(\alpha_\gamma) + \sum_{i=1}^n t_i i(c_i, \alpha_\gamma)$. \square

Let $\text{Mix}(\Sigma)$ be the set of Γ -equivariant isometry classes of mixed structures on Σ . We endow $\text{Mix}(\Sigma)$ with the equivariant Gromov topology defined as follows. Let \mathcal{E} be a set of metric spaces endowed with an isometric action of Γ . For any $X \in \mathcal{E}$, for any finite subset K of X , for any finite subset P of Γ and for any $\varepsilon > 0$, let $\mathcal{V}(X, K, P, \varepsilon)$ be the set of elements $X' \in \mathcal{E}$ such that there exist a finite subset $K' \subseteq X'$ and a relation $\mathcal{R} \subseteq K \times K'$, whose projections on K and K' are surjective, such that

$$\forall x, y \in K \ \forall x', y' \in K' \ \forall \gamma \in P, \text{ if } x\mathcal{R}x' \text{ and } y\mathcal{R}y', \text{ then } |d(x', \gamma y') - d(x, \gamma y)| < \varepsilon.$$

The sets $\mathcal{V}(X, K, P, \varepsilon)$ span a topology on \mathcal{E} called the *equivariant Gromov topology* (see for instance [Pau3, Pau1]). The equivariant Gromov topology naturally defines a topology on the set of Γ -equivariant isometry classes of metric spaces endowed with an isometric action of Γ , still called the equivariant Gromov topology, and we endow $\text{Mix}(\Sigma)$ with this topology.

Theorem 3.5.5 *The map $X \mapsto (\ell_X(\gamma))_{\gamma \in \Gamma}$ from $\text{Mix}(\Sigma)$ to \mathbb{R}_+^Γ is continuous and injective.*

Proof. First, we prove that the map is injective. Let (X, \mathcal{P}) and (X', \mathcal{P}') be two mixed structures on Σ , let Σ_0 and Σ'_0 be the associated tight subsurfaces of Σ and let $\ell_{[q]}$, (Λ, μ) and $(t_i c_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ (resp. $\ell_{[q']}$, (Λ', μ') and $(t'_i c'_i)_{i \in \{1, \dots, n'\}}$) be the length functions, measured hyperbolic laminations and multicurves defined by X and X' as in Lemma 3.5.4. Assume that for every $\gamma \in \Gamma$, we have $\ell_X(\gamma) = \ell_{X'}(\gamma)$. Let \widetilde{W}_0 be a connected component of $\widetilde{\Sigma}_0$, which is not a strip. The stabilizer $\Gamma_{\widetilde{W}_0}$ of \widetilde{W}_0 fixes a point $\star_{\widetilde{W}_0}$ in X . Since $\ell_X(\gamma) = 0$ if and only if $\ell_{X'}(\gamma) = 0$, all the elements of $\Gamma_{\widetilde{W}_0}$ have a fixed point in X' . Let us show that they have a common fixed point. As in the proof of Lemma 3.5.4, let (X'_2, d'_2) be the space obtained by replacing the edges of length t'_i (possibly equal to 0), with $i \in \{1, \dots, n'\}$, by edges of length $t'_i + 1$, and let T'_2 be the quotient space $(X'_2, d'_2) / \sim$, by the equivalence relation generated by $x \sim y$ if x and y belong to a common piece which is not an edge. The quotient metric space T'_2 is the simplicial tree dual to $\{(t'_i + 1)c'_i\}_{i \in \{1, \dots, n'\}}$, and it is endowed by the action of Γ defined by the action of Γ on X'_2 . All the elements of $\Gamma_{\widetilde{W}_0}$ have a fixed point in T'_2 . According to a Lemma of Serre (see [Sha, p. 271]), the subgroup $\Gamma_{\widetilde{W}_0}$ has a global fixed point in T'_2 , and by definition of the action of Γ on X'_2 , and hence on T'_2 , this point is a vertex of T'_2 . Hence, $\Gamma_{\widetilde{W}_0}$ preserve a piece of X'_2 , and hence it preserves a piece of X' . Since all the elements of $\Gamma_{\widetilde{W}_0}$ have a fixed point in X' , by the definition of the action of Γ on X' , this piece is a point, and $\Gamma_{\widetilde{W}_0}$ preserve a connected component \widetilde{W}'_0 of $\widetilde{\Sigma}'_0$ or of $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Sigma}'_0$ whose image W'_0 in Σ is a pair of pants, and W_0 is contained in W'_0 , up to isotopy. However, W_0 is either a torus minus a disk or we have $\chi(W_0) \leq -4$, hence W_0 cannot be contained in a pair of pants. Hence, up to isotopy, W_0 is contained in a connected component \widetilde{W}'_0 of Σ'_0 . Similarly, up to isotopy, any cylinder component of $\widetilde{\Sigma}_0$ is contained in a connected component of Σ'_0 or of $\Sigma - \Sigma'_0$ which is a pair of pants. In both cases, it is isotopic to a cylinder contained in a connected component of Σ'_0 . Hence, up to isotopy, any connected component W_0 of Σ_0 is contained in a connected component W'_0 of Σ'_0 .

Conversely, there exists a connected component Z_0 of Σ_0 such that W'_0 is contained in Z_0 , up to isotopy. Since the connected components of Σ_0 are pairwise disjoint, we have $W_0 = W'_0$. Hence, the connected components of Σ_0 and of Σ'_0 are equal, up to isotopy, and $\Sigma'_0 = \Sigma_0$, up to isotopy. Notably, we have $n = n'$ and $\{c_1, \dots, c_n\} = \{c'_1, \dots, c'_{n'}\}$.

Let \widetilde{W} be a connected component of $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Sigma}_0$. Let $X_{\widetilde{W}}$ (resp. $X'_{\widetilde{W}}$) be the piece of X (resp. X') preserved by $\Gamma_{\widetilde{W}}$, and let $H_{\widetilde{W}}$ be the set of non trivial and non peripheral elements of $\Gamma_{\widetilde{W}}$. The pieces $X_{\widetilde{W}}$ and $X'_{\widetilde{W}}$ are reduced to a point if and only if $W = p(\widetilde{W})$ is a pair of pants.

If $X_{\widetilde{W}}$ is a tree dual to a measured hyperbolic lamination, according to Lemma 3.4.15, for every $\varepsilon > 0$, there exists $\gamma \in H_{\widetilde{W}}$ such that $\ell_X(\gamma) < \varepsilon$. If $X_{\widetilde{W}}$ is the completion of a half-translation structure on a surface, then there exists $\varepsilon > 0$ such that $\ell_X(\gamma) \geq \varepsilon$ for every $\gamma \in H_{\widetilde{W}}$. And the same properties hold for $X'_{\widetilde{W}}$. Hence, the piece $X_{\widetilde{W}}$ is the completion of a surface if and only if the piece $X'_{\widetilde{W}}$ is also the completion of a surface. Assume that $X_{\widetilde{W}}$ and $X'_{\widetilde{W}}$ are the completions of $(\widetilde{W}, [\widetilde{q}_{\widetilde{W}}])$ and $(\widetilde{W}, [\widetilde{q}'_{\widetilde{W}}])$. Since $(\ell_X(\gamma))_{\gamma \in \Gamma_{\widetilde{W}}} = (\ell_{X'}(\gamma))_{\gamma \in \Gamma_{\widetilde{W}}}$, according to [DLR, Thm. 1], the quotients $(\widetilde{W}, [\widetilde{q}_{\widetilde{W}}]) / \Gamma_{\widetilde{W}}$ and $(\widetilde{W}, [\widetilde{q}'_{\widetilde{W}}]) / \Gamma_{\widetilde{W}}$ are isometric. Notably, the corresponding length functions $\ell_{X_{\widetilde{W}}}$ and $\ell_{X'_{\widetilde{W}}}$ are equal, and by addition, we have $\ell_{[q]} = \ell_{[q']}$. Next, for every $\gamma \in \Gamma$, we have

$$i((\Lambda, \mu), \alpha_\gamma) + \ell_{[q]}(\alpha_\gamma) + \sum_{i=1}^n t_i i(c_i, \alpha_\gamma) = i((\Lambda', \mu'), \alpha_\gamma) + \ell_{[q']}(\alpha_\gamma) + \sum_{i=1}^n t'_i i(c_i, \alpha_\gamma),$$

and by soustraction $i((\Lambda, \mu), \alpha_\gamma) + \sum_{i=1}^n t_i i(c_i, \alpha_\gamma) = i((\Lambda', \mu'), \alpha_\gamma) + \sum_{i=1}^n t'_i i(c_i, \alpha_\gamma)$. Since $(\Lambda, \mu) \cup$

$\sum_{i=1}^n t_i c_i$ and $(\Lambda', \mu') \cup \sum_{i=1}^n t'_i c_i$ are some measured hyperbolic laminations and since the boundary of Σ is empty, according to [FLP, Exp. 7], we have $(\Lambda, \mu) \cup (t_i c_i)_{i \in \{1, \dots, n\}} = (\Lambda', \mu') \cup (t'_i c_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$, and since the laminations Λ and Λ' have no closed leaf, we have $(\Lambda, \mu) = (\Lambda', \mu')$ and $(t_i c_i)_{i \in \{1, \dots, n\}} = (t'_i c_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$. Finally, according to Lemma 3.5.3, there exists a Γ -equivariant isometry between (X, d) and (X', d') . Hence, the map is injective.

Next, we prove that the map is continuous. It is sufficient to prove that for every $\gamma \in \Gamma - \{e\}$, the map $X \mapsto \ell_X(\gamma)$ from $\text{Mix}(\Sigma)$ to \mathbb{R}^+ is continuous. Let $\gamma \in \Gamma$, let $X \in \text{Mix}(\Sigma)$ and let $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of $\text{Mix}(\Sigma)$ that converges to X .

Case 1. Assume that γ is elliptic in X . Let $x \in X$ be a fixed point of γ . Let $P = \{\gamma\}$, $K = \{x\}$ and $\varepsilon > 0$. Then, for n large enough there exists $x_n \in X_n$ such that $d(x_n, \gamma x_n) < \varepsilon$. Hence $\ell_{X_n}(\gamma) < \varepsilon$.

Case 2. Assume that γ is hyperbolic in X . Let $\text{Ax}_X(\gamma)$ be a translation axis of γ in X and let $x \in \text{Ax}_X(\gamma)$. Then, we have $d(x, \gamma x) = \ell_X(\gamma)$ and $d(x, \gamma^2 x) - d(x, \gamma x) - d(\gamma x, \gamma^2 x) = 0$. Let $K = \{x\}$ and $P = \{\gamma, \gamma^2\}$. Let $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}\ell_X(\gamma)$. If n is large enough, there exists $x_n \in X_n$ such that

$$|d(x_n, \gamma x_n) - d(x, \gamma x)| < \varepsilon \text{ and } |d(x_n, \gamma^2 x_n) - d(x, \gamma^2 x)| < \varepsilon$$

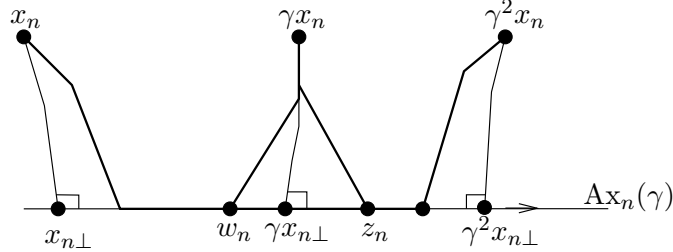
$$\text{so that } |d(x_n, \gamma^2 x_n) - d(x_n, \gamma x_n) - d(\gamma x_n, \gamma^2 x_n)| < 3\varepsilon.$$

Let \mathcal{P}_n be the set of pieces covering X_n , let $\widetilde{\Sigma}_{0n}$ be the tight subsurface associated with X_n as in Lemma 3.5.3, and let $\widetilde{\Sigma}_{0n}$ be its preimage in $\widetilde{\Sigma}$. Assume for a contradiction that γ is elliptic in X_n . Then γ belongs to the stabilizer $\Gamma_{\widetilde{W}}$ of a connected component \widetilde{W} of $\widetilde{\Sigma}_{0n}$ or of $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Sigma}_{0n}$ whose image in Σ is a pair of pants. Either γ does not preserve any boundary component of \widetilde{W} , and it fixes a unique point $\star_{\widetilde{W}}$ in X_n , or γ preserves a boundary component of \widetilde{W} . In the former case, it fixes an edge (possibly reduced to a point), and it preserves another piece Y_n of X_n . According to Lemma 3.5.1 and 3.5.2, any element of $\Gamma - \{e\}$ has at most one fixed point in any piece of X_n that is not an edge. Hence, up to (possibly) replacing the fixed point $\star_{\widetilde{W}}$ of γ by the good endpoint of the edge, the point $\star_{\widetilde{W}}$ is the unique common point between the segments $[x_n, \star_{\widetilde{W}}]$ and $[\star_{\widetilde{W}}, \gamma x_n]$, and by construction of X_n , the union $[x_n, \star_{\widetilde{W}}] \cup [\star_{\widetilde{W}}, \gamma x_n]$ is a geodesic segment, equal to $[x_n, \gamma x_n]$. Similarly, the segment $[x_n, \gamma^2 x_n]$ is the union $[x_n, \star_{\widetilde{W}}] \cup [\star_{\widetilde{W}}, \gamma^2 x_n]$. Hence, we have $|d(x_n, \gamma^2 x_n) - d(x_n, \gamma x_n) - d(\gamma x_n, \gamma^2 x_n)| = 2d(x_n, \star_{\widetilde{W}})$, hence $d(x_n, \star_{\widetilde{W}}) < \frac{3}{2}\varepsilon$ and $d(x_n, \gamma x_n) < 3\varepsilon$, a contradiction. Hence γ is hyperbolic in X_n .

If x_n belongs to a translation axis of γ in X_n , then $d(x_n, \gamma x_n) = \ell_{X_n}(\gamma)$, and $|\ell_X(\gamma) - \ell_{X_n}(\gamma)| < \varepsilon$. Otherwise, let $x_{n\perp}$ be the orthogonal projection of x_n onto the (possibly degenerated) flat strip union of all the translation axes of γ in X_n , and let $\text{Ax}_n(\gamma)$ be the translation axis containing $x_{n\perp}$. The segment $[x_n, x_{n\perp}]$ and $[x_n, \gamma x_n]$ may share a initial segment. Let a be the last intersection point between $[x_n, x_{n\perp}]$ and $[x_n, \gamma x_n]$. Similarly, let b be the last intersection point between $[\gamma x_n, \gamma x_{n\perp}]$ and $[\gamma x_n, x_n]$. Assume for a contradiction that the segment $[x_n, \gamma x_n]$ is disjoint from $\text{Ax}_n(\gamma)$. Then, the union $[a, x_{n\perp}] \cdot [x_{n\perp}, \gamma x_{n\perp}] \cdot [\gamma x_{n\perp}, b] \cdot [b, a]$ is a simple geodesic quadrangle, hence it is contained in a piece $Y_n \in \mathcal{P}_n$ (see [DS, Lem. 2.5]).

Let y_n be in $[x_n, x_{n\perp}] \cap Y_n$. Then γy_n belongs to $Y_n \cap [\gamma x_n, \gamma x_{n\perp}]$. Since $\gamma x_{n\perp}$ is not equal to $x_{n\perp}$, the piece Y_n is neither a point nor an edge. If Y_n is the \mathbb{R} -tree dual to a filling lamination or if Y_n is the completion of a surface endowed with a half-translation structure, according to Lemma 3.1.6, the segment $[y_n, \gamma y_n]$ intersects $\text{Ax}_n(\gamma)$, a contradiction. Hence, the segment $[x_n, \gamma x_n]$ meets $\text{Ax}_n(\gamma)$, and similarly the segments $[\gamma x_n, \gamma^2 x_n]$ and $[x_n, \gamma^2 x_n]$ meet $\text{Ax}_n(\gamma)$.

Moreover, since there exists a unique segment joining two points in a CAT(0) geodesic space, the first points of intersection between $[x_n, \gamma x_n]$ and $Ax_n(\gamma)$, and $[x_n, \gamma^2 x_n]$ and $Ax_n(\gamma)$ are equal. Similarly, the last points of intersection between $[\gamma x_n, \gamma^2 x_n]$ and $Ax_n(\gamma)$, and $[x_n, \gamma^2 x_n]$ and $Ax_n(\gamma)$ are equal. Let w_n (resp. z_n) be the last (resp. first) point of intersection between $[x_n, \gamma x_n]$ and $Ax_n(\gamma)$ (resp. $[\gamma x_n, \gamma^2 x_n]$ and $Ax_n(\gamma)$).



We have $|d(x_n, \gamma^2 x_n) - d(x_n, \gamma x_n) - d(\gamma x_n, \gamma^2 x_n)| = d(w_n, \gamma x_n) + d(z_n, \gamma x_n) - d(w_n, z_n)$. Moreover, since the space is CAT(0), we have $d(w_n, \gamma x_n)^2 \geq d(w_n, \gamma x_{n\perp})^2 + d(\gamma x_n, \gamma x_{n\perp})^2$ and $d(z_n, \gamma x_n)^2 \geq d(z_n, \gamma x_{n\perp})^2 + d(\gamma x_n, \gamma x_{n\perp})^2$. Hence

$$\begin{aligned} d(w_n, \gamma x_n) - d(w_n, \gamma x_{n\perp}) &\geq \frac{d(\gamma x_n, \gamma x_{n\perp})^2}{d(w_n, \gamma x_n) + d(w_n, \gamma x_{n\perp})} \\ &\geq \frac{d(x_n, x_{n\perp})^2}{2d(x_n, \gamma x_n)} \end{aligned}$$

Similarly, we have $d(z_n, \gamma x_n) - d(z_n, \gamma x_{n\perp}) \geq \frac{d(x_n, x_{n\perp})^2}{2d(x_n, \gamma x_n)}$. Hence $|d(x_n, \gamma^2 x_n) - d(x_n, \gamma x_n) - d(\gamma x_n, \gamma^2 x_n)| \geq \frac{d(x_n, x_{n\perp})^2}{d(x_n, \gamma x_n)}$, and so $d(x_n, x_{n\perp})^2 \leq 3\varepsilon d(x_n, \gamma x_n) \leq 3\varepsilon(\ell_X(\gamma) + \varepsilon)$. Hence $|d(x_n, \gamma x_n) - \ell_{X_n}(\gamma)| \leq 2\sqrt{3\varepsilon(\ell_X(\gamma) + \varepsilon)}$, so $|\ell_X(\gamma) - \ell_{X_n}(\gamma)| \leq 2\sqrt{3\varepsilon(\ell_X(\gamma) + \varepsilon)} + \varepsilon$. \square

Let W be a (open) non trivial, π_1 -injective, connected subsurface of Σ , and let $\text{Flat}(W)$ be the set of (isotopy classes) of half-translation structures on W , that can be extended to half-translation structures on the compact surface obtained from W by filling in the punctures, with possibly some singularities of angle π at the added points. We identify $\text{Flat}(W)$ with the Γ -equivariant isometry classes of universal covers of half-translation structures on W and we endow $\text{Flat}(W)$ with the Gromov equivariant topology. Let $\widetilde{W} \rightarrow W$ be a universal cover with covering group $\Gamma_{\widetilde{W}}$. For every element $[q_W]$ of $\text{Flat}(W)$, we denote by $[\widetilde{q}_{\widetilde{W}}]$ its lift on \widetilde{W} . Let $H_{\widetilde{W}}$ be the set of non trivial and non peripheral elements of $\Gamma_{\widetilde{W}}$.

Lemma 3.5.6 *The map $\pi : (W, [q_W]) \mapsto (\ell_{[\widetilde{q}_{\widetilde{W}}]}(\gamma))_{\gamma \in \Gamma_{\widetilde{W}}} from $\text{Flat}(W)$ to $(\mathbb{R}^+)^{\Gamma_{\widetilde{W}}} - \{0\}$ is a homeomorphism onto its image.$*

Proof. As in Lemma 3.5.5, this map is injective and continuous. Let $((x_{\gamma,n})_{\gamma \in \Gamma_{\widetilde{W}}})_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of the image of $\text{Flat}(W)$ in $(\mathbb{R}^+)^{\Gamma_{\widetilde{W}}} - \{0\}$ that converges to $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_{\widetilde{W}}}$ in the image of $\text{Flat}(W)$. Let $(W, [q_n])_{n \in \mathbb{N}}$ be the sequence of preimages of $((x_{\gamma,n})_{\gamma \in \Gamma_{\widetilde{W}}})_{n \in \mathbb{N}}$ in $\text{Flat}(W)$. For all $n \in \mathbb{N}$, let λ_n be the minimal displacement of generator of $(\widetilde{W}, [\widetilde{q}_n])$, for a finite generating set of $\Gamma_{\widetilde{W}}$, as in Section 3.4. Assume for a contradiction that $\lim_{\omega} \lambda_n = +\infty$. Then, there exists a generator $s \in \Gamma$ such that $\lim_{\omega} \ell_{(\widetilde{W}, [\widetilde{q}_n])}(s) = +\infty$, and $x_{s,n}$ does not ω -converge to $x_s \in \mathbb{R}^+$. Hence, we have $\lim_{\omega} \lambda_n < +\infty$,

and the asymptotic limit $\lim_{\omega}(\widetilde{W}, [\widetilde{q}_n])_{n \in \mathbb{N}}$, without renormalization, exists and is endowed with an isometric action of $\Gamma_{\widetilde{W}}$. Since the point $(x_{\gamma})_{\gamma \in \Gamma_{\widetilde{W}}}$ is in the image of $\text{Flat}(W)$, there exists $\varepsilon' > 0$ such that for all $\gamma \in H_{\widetilde{W}}$, we have $x_{\gamma} > \varepsilon'$. Hence, according to Lemma 3.4.14 (that immediately extends to the universal cover of a finite type surface), there exist $\varepsilon > 0$ and $I \in \omega$ such that for all $\gamma \in H_{\widetilde{W}}$ and $n \in I$, we have $\ell_{(\widetilde{W}, [\widetilde{q}_n])}(\gamma) > \varepsilon$. Hence, according to Section 3.4.6 (that immediately extends to the universal cover of a finite type surface), the space $\lim_{\omega}(\widetilde{W}, [\widetilde{q}_n])_{n \in \mathbb{N}}$, minus the fixed points of the peripheral elements of $\Gamma_{\widetilde{W}}$, is the universal cover of W endowed with a half-translation structure, that extends to the punctures. Moreover, the ultralimit $\lim_{\omega}(\widetilde{W}, [\widetilde{q}_n])_{n \in \mathbb{N}}$ is the limit of a subsequence of $(\widetilde{W}, [\widetilde{q}_n])_{n \in \mathbb{N}}$ for the Gromov equivariant topology (see [Pau2]). Hence, every subsequence of $(W, [q_n])_{n \in \mathbb{N}}$ has a subsequence that converges to an element of $\text{Flat}(W)$, equal to $(W, [q_W])$ by injectivity of π . Hence the sequence $(W, [q_n])_{n \in \mathbb{N}}$ converges to $(W, [q_W])$, and the inverse map is continuous. \square

Lemma 3.5.7 *The equivariant Gromov topology on $\text{Mix}(\Sigma)$ is metrizable.*

Proof. According to Lemma 3.5.5, the space $\text{Mix}(\Sigma)$ is Hausdorff and with countable bases of neighborhoods of points. Let us prove that it is separable. Let Σ_0 be a tight subsurface of Σ , let $\widetilde{\Sigma}_0$ be its preimage in $\widetilde{\Sigma}$, let A be the set of connected components of $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Sigma}_0$ whose image in Σ is not a pair of pants, and let B be the finite set of Γ -orbits of boundary components of $\widetilde{\Sigma}_0$. Let $E(\Sigma_0)$ be the subset of $\text{Mix}(\Sigma)$ whose underlying tight subsurface is Σ_0 . For every connected component \widetilde{W} of $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Sigma}_0$, let $W = p(\widetilde{W})$ and let $F_1(\widetilde{W})$ be the set of completions of universal covers of (isotopy classes of) half-translation structures on W , and $F_2(\widetilde{W})$ be the set of \mathbb{R} -trees dual to a filling measured hyperbolic lamination on W . We endow $F_1(\widetilde{W})$ and $F_2(\widetilde{W})$ with the Gromov equivariant topology. Let Φ be the map from $\prod_{\widetilde{W} \in A} (F_1(\widetilde{W}) \amalg F_2(\widetilde{W})) \times (\mathbb{R}^+)^B$, endowed with the product topology, to $\text{Mix}(\Sigma)$ that associates to $((X_{\widetilde{W}})_{\widetilde{W} \in A}, (t_b)_{b \in B})$ the Γ -equivariant isometry classes of mixed structures such that the piece preserved by $\Gamma_{\widetilde{W}}$, with $\widetilde{W} \in A$, is $X_{\widetilde{W}}$, and the length of the edges pointwise preserved by the stabilizers of the elements of $b \in B$ is t_b (that exists and is unique under the few conditions before Lemma 3.5.3).

Moreover, for every element $\widetilde{W} \in A$, according to [Pau2, Thm. 5.2], the space $F_2(\widetilde{W})$ is separable, and according to Lemma 3.5.6, the space $F_1(\widetilde{W})$ is separable. Since $(\mathbb{R}^+)^B$ is separable and A is countable, the space $\prod_{\widetilde{W} \in A} (F_1(\widetilde{W}) \amalg F_2(\widetilde{W})) \times (\mathbb{R}^+)^B$ is separable, and since the map Φ is continuous

and surjective, the space $E(\Sigma_0)$ is separable. Finally, the space $\text{Mix}(\Sigma)$ is the countable union of the sets $E(\Sigma_0)$, with Σ_0 a isotopy class of tight subsurface of Σ , hence $\text{Mix}(\Sigma)$ is separable. Since $\text{Mix}(\Sigma)$ has countable bases of neighborhoods of points, it has a countable basis. Moreover, the space $(\mathbb{R}^+)^{\Gamma} - \{0\}$ is normal, hence according to Lemma 3.5.5, the space $\text{Mix}(\Sigma)$ is also normal. According to a theorem of Urysohn (see for instance [Dug, Ch. 9, 9.2]), it is metrizable. \square

The group \mathbb{R}^{+*} acts on $\text{Mix}(\Sigma)$ by multiplication of the distances. Let $\mathbb{P}\text{Mix}(\Sigma)$ and $\mathbb{P}\text{Flat}(\Sigma)$ be the quotient of $\text{Mix}(\Sigma)$ and $\text{Flat}(\Sigma)$ by these actions, endowed with the quotient topology of the equivariant Gromov topology.

Theorem 3.5.8 *The space $\mathbb{P}\text{Flat}(\Sigma)$ is an open and dense subset of $\mathbb{P}\text{Mix}(\Sigma)$, which is compact.*

Remark. According to Section 3.4.6, the Mumford's theorem is valid for $\text{Mix}(\Sigma)$: the closure of a subset of $\text{Mix}(\Sigma)$ whose lengths of systoles are uniformly bounded by a positive constant is compact.

Proof. The space $\mathbb{P}\text{Flat}(\Sigma)$ can be identified with the space $\text{Flat}^1(\Sigma)$ of half-translation structures of area 1 on Σ . Let $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}'_n])_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of $\text{Flat}^1(\Sigma)$. Let S be a finite generating set of Γ , and for all $n \in \mathbb{N}$, let λ_n be the minimal displacement of the generators on $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}'_n])$ and let \star_n be a point such that $\max\{d'_n(\star_n, s\star_n) : s \in S\}$ is less than $\lambda_n + 1$, as in Section 3.4. Let $[\tilde{q}_n] = \frac{1}{\lambda_n}[\tilde{q}'_n]$, and let $[q_n]$ be the half-translation structure on Σ defined by $[\tilde{q}_n]$. Let ω be a non principal ultrafilter on \mathbb{N} as in Section 3.3. Then, the ultralimit $\lim_{\omega}(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n], \star_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a CAT(0), geodesic, complete space, endowed with an isometric action of Γ .

Let us show that $\lim_{\omega}(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n], \star_n)_{n \in \mathbb{N}}$ has a Γ -invariant subset which is a mixed structure. Let $\mathcal{S}_0 = \{\alpha \in \mathcal{S}(\Sigma) : \lim_{\omega} \ell_{[q_n]}(\alpha) = 0\}$ and let Σ_0 be the tight subsurface of Σ filled up by \mathcal{S}_0 , and let $\tilde{\Sigma}_0$ be its preimage in $\tilde{\Sigma}$. No connected component of Σ_0 is a pair of pants. For all connected component \tilde{W} of $\tilde{\Sigma}_0$ or of $\tilde{\Sigma} - \tilde{\Sigma}_0$ and $n \in \mathbb{N}$, we denote by \tilde{W}_n the $[\tilde{q}_n]$ -geometric realization of \tilde{W} . If \tilde{W} is a connected component of $\tilde{\Sigma} - \tilde{\Sigma}_0$, let W be the finite type surface, image of \tilde{W} in Σ . According to Lemmas 3.4.12, 3.4.17, 3.4.21, 3.4.27, the convex core of $\Gamma_{\tilde{W}}$ in $[\tilde{W}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ is a unique point $\star_{\tilde{W}}$ if \tilde{W} is a connected component of $\tilde{\Sigma}_0$ or if W is a pair of pants, and it is either the completion of a universal cover of W endowed with a half-translation structure that can be extended (as in Section 3.4.6), or the \mathbb{R} -tree dual to a filling measured hyperbolic lamination on W (for any complete hyperbolic metric). In the two cases, we denote it by $X_{\tilde{W}}$. Finally, if $\Gamma_{\tilde{c}}$ is the stabilizer in Γ of a boundary component \tilde{c} of $\tilde{\Sigma}_0$, we have seen in Section 3.4.7, that $\Gamma_{\tilde{c}}$ pointwise preserves a (maximal) flat strip (possibly reduced to a geodesic), and there exists a geodesic segment $e_{\tilde{c}}$, possibly reduced to a point, orthogonal to the boundary components of the flat strip (if any), such that the intersection of the translation axis of any hyperbolic element of Γ which is interlaced with \tilde{c} (see Section 3.4 for the definition), is $e_{\tilde{c}}$. Then, the union X of the points $\star_{\tilde{W}}$, of the convex subsets $X_{\tilde{W}}$ and of the geodesic segments $e_{\tilde{c}}$, where \tilde{W} is a connected component of $\tilde{\Sigma}_0$ or of $\tilde{\Sigma} - \tilde{\Sigma}_0$ and \tilde{c} is a boundary component of $\tilde{\Sigma}_0$, is a convex tree-graded subspace of $\lim_{\omega}(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n], \star_n)_{n \in \mathbb{N}}$, notably it is CAT(0). Moreover, it is naturally Γ -invariant, and hence endowed with an isometric action of Γ . Moreover, if \tilde{W} is a connected component of the preimage of a cylinder component W of $\Sigma - \Sigma_0$, and if for all $n \in \mathbb{N}$ we denote by $h_n(\tilde{W})$ the height of the $[\tilde{q}_n]$ -geometric realization of \tilde{W} , then $\lim_{\omega} h_n(\tilde{W}) > 0$, otherwise there would exist an element of \mathcal{S}_0 that would cut W and that would be contained in the union of W and of the two connected components of Σ_0 that bound W , and W would be contained in Σ_0 . Similarly, if \tilde{W} is a connected component of $\tilde{\Sigma} - \tilde{\Sigma}_0$ whose image in Σ is a pair of pants, there exists at least a boundary component \tilde{c} of \tilde{W} such that $\lim_{\omega} h_n(\tilde{c}) > 0$, with $h_n(\tilde{c})$ the height of the flat strip union of all the $[\tilde{q}_n]$ -geometric representatives of \tilde{c} , otherwise W would be contained in Σ_0 . Hence, the subspace X , endowed with the action of Γ , satisfies all the properties of Definition 3.5.2.

Moreover, by the definition of the ultralimits, the ultralimit $\lim_{\omega}(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n], \star_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a limit of a subsequence of $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])_{n \in \mathbb{N}}$ for the equivariant Gromov topology, in the space of Γ -equivariant isometry classes of metric spaces endowed with an isometric action of Γ . Since X is Γ -invariant in $\lim_{\omega}(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n], \star_n)_{n \in \mathbb{N}}$, the space X is also a limit of a subsequence of $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])_{n \in \mathbb{N}}$. If the sequence $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])_{n \in \mathbb{N}}$ converges in $\text{Mix}(\Sigma)$, since $\text{Mix}(\Sigma)$ is separated (by Corollary 3.5.7), the space X is its unique limit in $\text{Mix}(\Sigma)$.

Besides, by the geometric construction of a sequence in $\text{Flat}(\Sigma)$ at the end of the proof of [DLR, Thm. 6 p. 27], we can obtain any mixed structure as a Γ -equivariant subspace of the ultralimit of a sequence of $\mathbb{P}\text{Flat}(\Sigma)$. Let us recall this construction of [DLR]. Let (X, d) be a mixed structure on

Σ and let Σ_0 be the associated tight subsurface. We build a sequence in $\text{Flat}(\Sigma)$ piece by piece as follows. Let W be a connected component of $\Sigma - \Sigma_0$ which is neither a cylinder nor a pair of pants and let \widetilde{W} be a connected component of the preimage of W in $\widetilde{\Sigma}$. Then, the piece $X_{\widetilde{W}}$ is non empty.

If the piece $X_{\widetilde{W}}$ is the completion of a half-translation structure $[q_W]$ on W , let $q_W \in \mathcal{Q}(W)$ be a representative of $[q_W]$ and let $(W_n, q_{W,n})$ be the half-translation surface obtained by cutting vertical slits at the punctures of (W, q_W) of length $\frac{1}{n^2}$.

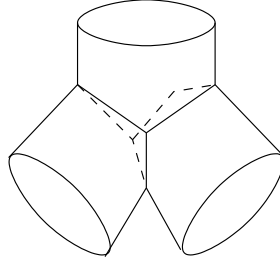
If $X_{\widetilde{W}}$ is the dual tree to a filling (and minimal) measured hyperbolic lamination (Λ_W, μ_W) on W , let q_W be a quadratic differential on W whose vertical measured foliation is associated to (Λ_W, μ_W) (by the map of [Lev]), and let $(W_n, q_{W,n})$ be the surface obtained from the half-translation surface $(W, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n^2} \end{pmatrix} \cdot q_W)$ by cutting vertical slits at the punctures of length $\frac{1}{n^2}$.

Finally, let q_0 be a quadratic differential on the interior of Σ_0 whose vertical foliation is minimal (on every connected component, which is always possible) and let us cut vertical slits of lengths $\frac{1}{n}$ at the punctures. Thus, we get a surface (Σ'_0, q'_0) . We set $(\Sigma_{0,n}, q_{0,n}) = (\Sigma'_0, \frac{1}{n} q'_0)$.

For every homotopy class c of a boundary component of Σ_0 , let $C_{c,n}$ be the flat cylinder of height $\ell_X(X_{\widetilde{c}})$, where $X_{\widetilde{c}}$ is the edge associated to a lift \widetilde{c} of c , and of circumference $\frac{1}{n^2}$. Any boundary component c of Σ_0 bounds a connected component W_0 of Σ_0 and a connected component W of $\Sigma - \Sigma_0$. If W is neither a cylinder nor a pair of pants, the boundary component c corresponds to a boundary component of W_0 and a puncture of W , and for all $n \in \mathbb{N}$, we glue isometrically the boundary components of $C_{c,n}$ on the corresponding slits of $\Sigma_{0,n}$ and of W_n .

If W is a cylinder component of $\Sigma - \Sigma_0$, it is bounded by two boundary components of Σ_0 which are freely homotopic. Then, we glue the boundary components of $C_{c,n}$ to the corresponding slits of $\Sigma_{0,n}$.

Finally, if W is a pair of pants, it is bounded by three boundary components of Σ_0 . We cover it by gluing the three corresponding cylinders, and we glue their other boundary components on the corresponding slits of $\Sigma_{0,n}$.



We thus obtain a locally Euclidean metric on Σ with conical singular points of angle $k\pi$, with $k \in \mathbb{N}$ and $k \geq 3$. Moreover, all the slits on which are glued the flat cylinders are vertical. Hence, the surface has a singular foliation, whose leaves are vertical (with respect to the quadratic differentials on the pieces). Hence, this metric comes from a quadratic differential q_n on Σ . Let $(\widetilde{\Sigma}, [\widetilde{q}_n])_{n \in \mathbb{N}}$ be the corresponding sequence of $\text{Flat}(\Sigma)$. Then, up to extraction, the sequence converges to $X' \in \text{Mix}(\Sigma)$. Let Σ'_0 be the associated tight subsurface of Σ . Let $\gamma \in \Gamma$ and let α_γ be the corresponding homotopy class of closed curves of Σ .

Assume first that α_γ is simple. We easily see that $\ell_{X'}(\gamma) = 0$ if and only if α_γ has a representative in Σ_0 . Hence, $\Sigma_0 = \Sigma'_0$. Moreover, let \widetilde{W} be a connected component of $\widetilde{\Sigma} - \widetilde{\Sigma}_0$ and let $W = p(\widetilde{W})$. Assume that γ preserves \widetilde{W} , and assume first that W is neither a cylinder nor a pair of pants. If $X_{\widetilde{W}}$ is the completion of the lift of a half-translation structure $[q_W]$, then $\lim_{\omega} \ell_{[q_n]}(\alpha_\gamma) = \ell_{[q_W]}(\alpha_\gamma)$.

If $X_{\widetilde{W}}$ is the dual tree to a the measured hyperbolic lamination (Λ_W, μ_W) , then, for all $n \in \mathbb{N}$, if we denote by ν_W^h and ν_W^v the horizontal and the vertical foliations of the quadratic differential q_W on W , as above we have $\max\{\frac{1}{n^2}i(\alpha_\gamma, \nu_W^h), i(\alpha_\gamma, \nu_W^v)\} \leq \ell_{[q_n]}(\alpha_\gamma) \leq \frac{1}{n^2}i(\alpha_\gamma, \nu_W^h) + i(\alpha_\gamma, \nu_W^v)$, and $\lim_\omega \ell_{[q_n]}(\alpha_\gamma) = i(\alpha_\gamma, \nu_W^v) = i(\alpha_\gamma, (\Lambda_W, \mu_W))$. Hence, the pieces of X and X' which are not edges are the same. Finally, by the choices of the cylinders $C_{c,n}$, with c a boundary component of Σ_0 and $n \in \mathbb{N}$, the lengths of the edges of X and X' are the same. Hence, we have $X = X'$ and the closure of $\mathbb{P}\text{Flat}(\Sigma)$ for the equivariant Gromov topology is $\mathbb{P}\text{Mix}(\Sigma)$.

Let d be a distance on $\mathbb{P}\text{Mix}(\Sigma)$ that induces the topology. Let $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence in $\mathbb{P}\text{Mix}(\Sigma)$. For all $n \in \mathbb{N}$, there exists a sequence $(X_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{P}\text{Flat}(\Sigma)$ such that $d(X_{n,k}, X_n) < \frac{1}{k}$. We have seen that there exists $X \in \mathbb{P}\text{Mix}(\Sigma)$ such that the sequence $(X_{n,n})_{n \in \mathbb{N}}$ ω -converges to X in $\mathbb{P}\text{Mix}(\Sigma)$. Then, the sequence $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ω -converges to X . Hence, the space $\mathbb{P}\text{Mix}(\Sigma)$ is sequentially compact, and since it is Hausdorff, it is compact.

Finally, let us prove that $\mathbb{P}\text{Mix}(\Sigma) - \mathbb{P}\text{Flat}(\Sigma)$ is closed. By the definition of the mixed structures, and according to Lemma 3.4.15, the set $\text{Mix}(\Sigma) - \text{Flat}(\Sigma)$ is the set of the elements $X \in \text{Mix}(\Sigma)$ such that for all $\varepsilon > 0$, there exists $\gamma \in \Gamma - \{e\}$ such that $\ell_X(\gamma) < \varepsilon$. And a sequence $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ of $\text{Flat}(\Sigma)$ ω -converges to an element of $\text{Flat}(\Sigma)$ if and only if the set $\mathcal{S}_0 = \{\alpha \in \mathcal{S}(\Sigma) : \lim_\omega \ell_{Y_k}(\alpha) = 0\}$ is empty, the ω -limits of the translation distances of the non trivial elements of Γ are uniformly bounded below by the injectivity radius of the limit of the sequence in $\text{Flat}(\Sigma)$. According to Lemma 3.4.14, this happens if and only if there exists $\varepsilon > 0$ such that for all $\gamma \in \Gamma - \{e\}$ and ω -almost all $n \in \mathbb{N}$, we have $\ell_{Y_k}(\gamma) \geq \varepsilon$.

Let $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of $\text{Mix}(\Sigma) - \text{Flat}(\Sigma)$ that converges to $X \in \text{Mix}(\Sigma)$, and for all $n \in \mathbb{N}$ let $(X_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ be a sequence in $\text{Flat}(\Sigma)$ that converges to X_n . For all $n \in \mathbb{N}$, there exists $\gamma_n \in \Gamma - \{e\}$ such that $\ell_{X_n}(\gamma_n) < \frac{1}{n}$. Since the map $X \mapsto \ell_X(\gamma)$ is continuous, there exists $k(n) \in \mathbb{N}$ such that $\ell_{(X_{n,k(n)})}(\gamma_n) < \frac{1}{n}$. Since the sequence $(X_{n,k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converges to X in $\text{Mix}(\Sigma)$, X does not belong to $\text{Flat}(\Sigma)$. Hence $\text{Mix}(\Sigma) - \text{Flat}(\Sigma)$ is closed, and so is $\mathbb{P}\text{Mix}(\Sigma) - \mathbb{P}\text{Flat}(\Sigma)$. \square

Theorem 3.5.9 *The map $[X] \mapsto [\ell_X(\gamma)]_{\gamma \in \Gamma}$ from $\mathbb{P}\text{Mix}(\Sigma)$ to $\mathbb{P}\mathbb{R}^\Gamma$ is a homeomorphism onto its image, equivariant under the action of the mapping class group of Σ .*

Proof. It is a consequence of Lemma 3.5.5 and Theorem 3.5.8. \square

In [DLR, Thm. 4], Duchin-Leininger-Rafi define an embedding $[q] \mapsto L_{[q]}$ of $\text{Flat}(\Sigma)$ into the space $\mathfrak{C}(\Sigma)$ of geodesic currents on Σ (see for instance [Bon3] for the definition of the geodesic currents), uniquely defined such that for every $\alpha \in \mathcal{C}(\Sigma)$, $i(L_{[q]}, \alpha) = \ell_{[q]}(\alpha)$. Moreover, in [DLR, §. 5], they define the space $\mathcal{M}(\Sigma)$ of mixed structures on Σ as the subset of $\mathfrak{C}(\Sigma)$ of geodesic currents which are the sum of a geodesic current $L_{[q']}$, defined by $i(L_{[q']}, \alpha_\gamma) = \ell_{[q']}(\alpha_\gamma)$ for every $\gamma \in \Gamma$ where $[q']$ is a half-translation structure on a (non necessarily proper) subsurface Σ' of Σ , whose connected component are π_1 -injective and have a negative Euler characteristic, and of a measured hyperbolic laminations (for any hyperbolic metric on Σ) whose support is disjoint from Σ' (up to isotopy). Let $\mathbb{P}\mathfrak{C}(\Sigma) = (\mathfrak{C}(\Sigma) - \{0\})/\mathbb{R}^{+*}$ and $\mathbb{P}\mathcal{M}(\Sigma)$ be the image of $\mathcal{M}(\Sigma) - \{0\}$ in $\mathbb{P}\mathfrak{C}(\Sigma)$. They prove at [DLR, Thm. 6] that the closure of the image of $\mathbb{P}\text{Flat}(\Sigma)$ in $\mathbb{P}\mathfrak{C}(\Sigma)$ is exactly $\mathbb{P}\mathcal{M}(\Sigma)$. Let Φ be the map from $\text{Mix}(\Sigma)$ to $\mathcal{M}(\Sigma)$ that associates to the lengths function $\ell_{[q]}$, the measured hyperbolic lamination (Λ, μ) and the multicurve $(t_i c_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ associated with $(X, \mathcal{P}) \in \text{Mix}(\Sigma)$, the geodesic current $L_{[q]} + (\Lambda, \mu) + \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} t_i c_i$ (where the measured hyperbolic laminations are seen as geodesic currents).

Lemma 3.5.10 *The map Φ is a homeomorphism which is an extension to $\text{Mix}(\Sigma)$ of the map $[q] \mapsto L_{[q]}$.*

Proof. It is a consequence of the fact that the map $\mu \mapsto (i(\mu, \alpha))_{\alpha \in \mathcal{C}(\Sigma)}$ is an embedding of $\mathcal{C}(\Sigma)$ into its image in $(\mathbb{R}^+)^{\mathcal{C}(\Sigma)}$ (see for instance [DLR, Thm. 10,11] and of Theorem 3.5.9. \square

3.6 Surfaces with boundary.

Let Σ be a compact, connected, orientable surface, such that $\chi(\Sigma) < 0$, and let $p : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ be a universal cover with covering group Γ . Starting from Section 3.4 we have assumed that the boundary of Σ is empty, to simplify the writting, but the results can be extended very easily to a surface with non empty boundary.

- The results of Subsection 3.4.1 remain the same, except Lemma 3.4.2 which has no sense if \tilde{c} is a boundary component of $\tilde{\Sigma}$. In Lemma 3.4.4, if \tilde{c} is a boundary component of $\tilde{\Sigma}$, we define the point $\star_{\tilde{c}}$ and we modify the proof as follows. Let ξ and η be two points of $\partial_{\infty}\tilde{\Sigma}$, and for all $n \in \mathbb{N}$, let $\xi_{n\perp}$ and $\eta_{n\perp}$ be their orthogonal projections on \tilde{c}_n . Let $\alpha_n = [\xi_{n\perp}, \xi[$ and $\beta_n = [\eta_{n\perp}, \eta[$. There exists $k \in \mathbb{N}$ such that, for all $n \in \mathbb{N}$, α_n and β_n are contained between $\gamma_{\tilde{c}}^k(\alpha_n)$ and $\gamma_{\tilde{c}}^{-k}(\alpha_n)$. Hence, as is the usual proof of Lemma 3.4.4, the point $[\eta_{n\perp}]_{n \in \mathbb{N}} = [\xi_{n\perp}]_{n \in \mathbb{N}}$ does not depend on $\eta \in \partial_{\infty}\tilde{\Sigma}$, and we set $\star_{\tilde{c}} = [\eta_{n\perp}]_{n \in \mathbb{N}}$. The last ten lines of the proof of Lemma 3.4.4 should be replaced by the following ones : Let \tilde{r}_0 be a infinite geodesic ray of $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_0])$ that is orthogonal to \tilde{c}_0 at his base point, and for all $n \in \mathbb{N}$, let \tilde{r}_n be a geodesic ray of $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}_n])$ orthogonal to \tilde{c}_n at his base point, having the same point at infinity than \tilde{r}_0 . There exists $k \in \mathbb{N}$, independent of $n \in \mathbb{N}$, such that $Ax_n(\gamma_1)$ and $Ax_n(\gamma_2)$ are contained between $\gamma_{\tilde{c}}^{-k}(\tilde{r}_n)$ and $\gamma_{\tilde{c}}^k(\tilde{r}_n)$, with k independent of n . For all $n \in \mathbb{N}$, the union $Ax_n(\gamma_1) \cup [x_{1,n}, x_{2,n}] \cup Ax_n(\gamma_2)$ is contained in a connected generalized subsurface of $\tilde{\Sigma}$ whose boundary is contained in $\gamma_{\tilde{c}}^k(\tilde{r}_n) \cup \gamma_{\tilde{c}}^{-k}(\tilde{r}_n) \cup \tilde{c}_n$. Since we have $[\gamma_{\tilde{c}}^k(\tilde{r}_n(0))]_{n \in \mathbb{N}} = [\gamma_{\tilde{c}}^{-k}(\tilde{r}_n(0))]_{n \in \mathbb{N}} = \star_{\tilde{c}}$, we see that $[x_{1,n}, x_{2,n}]_{n \in \mathbb{N}}$ can intersect $[\tilde{c}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ at most at $\star_{\tilde{c}}$. \square

- The notation, results and proofs of Subsections 3.4.3, 3.4.4, 3.4.5, and 3.4.7 remain the same. In Subsection 3.4.3, we have to be careful that some boundary components of Σ may belong to \mathcal{S}_0 . Then, the subsurface Σ_0 contains some cylinders that can be homotoped to the corresponding boundary components of Σ .

- In Subsection 3.4.6, the lengths of some boundary components of W may not tend to zero. We have to use the double of the surface Σ (recall that the boundary has constant direction). Let Σ^2 be the double of Σ . We use the same techniques that for a surface Σ without boundary, with the universal cover of Σ^2 . Then, we consider a connected component \tilde{W} of the preimage of W in the universal cover of Σ^2 , and we set \tilde{W}_{ω} to be the convex core of the stabilizer $\Gamma_{\tilde{W}}$ of \tilde{W} in Γ , in the ultralimit. Then, \tilde{W}_{ω} is the completion of a surface with possibly non empty boundary.

- In Section 3.5, the pieces of the mixed structures which are completions of surfaces may have some non empty boundary. In Lemma 3.5.2, the only elements which have a fixed points are the stabilizers of the boundary components of W which are boundary components of $\tilde{\Sigma}_0$. We still have to use the double of Σ to prove Theorem 3.5.8. The Lemma 3.5.6, and the Theorems 3.5.5 and 3.5.9 are no longer true.

Chapitre 4

Laminations géodésiques plates.

4.0.1 Espaces localement CAT(0).

Soient (X, d) un espace géodésique localement CAT(0) et $p : (\tilde{X}, \tilde{d}) \rightarrow (X, d)$ un revêtement universel de groupe de revêtement Γ . Si l'espace (X, d) est complet (par exemple si X est compact), d'après le théorème de Cartan-Hadamard (voir [BH, Chap. II.4]), l'espace (\tilde{X}, \tilde{d}) est complet et CAT(0). Dans la suite, on supposera toujours que (X, d) est complet. Nous noterons $\partial_\infty \tilde{X}$ le bord à l'infini de (\tilde{X}, \tilde{d}) et $\partial_\infty^2 \tilde{X} = \partial_\infty \tilde{X} \times \partial_\infty \tilde{X} - \Delta$ (où $\Delta = \{(x, x), x \in \partial_\infty \tilde{X}\}$), muni de la topologie induite par la topologie produit.

Soit $\ell : \mathbb{R} \rightarrow (X, d)$ une géodésique locale. On dit que ℓ est *périodique* s'il existe $T_0 > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\ell(t + T_0) = \ell(t)$, qu'elle est *positivement périodique* s'il existe des réels strictement positifs T et T_0 tels que $\ell(t + T_0) = \ell(t)$ pour tout $t > T$. On dit que ℓ est *positivement compacte* si $\ell([0, +\infty[)$ est compacte. Si ℓ est périodique ou positivement périodique, elle est aussi d'image compacte ou positivement compacte, mais la réciproque est fausse (voir le lemme 4.3.2).

On note \mathcal{G} l'ensemble des géodésiques locales paramétrées de (X, d) et $\tilde{\mathcal{G}}$ l'ensemble des géodésiques paramétrées de (\tilde{X}, \tilde{d}) (puisque (\tilde{X}, \tilde{d}) est CAT(0), les géodésiques locales de (\tilde{X}, \tilde{d}) sont des géodésiques). Alors \mathbb{R} agit sur \mathcal{G} et $\tilde{\mathcal{G}}$ par translations à la source. On note \mathcal{G}_{np} et $\tilde{\mathcal{G}}_{np}$ les quotients de \mathcal{G} et $\tilde{\mathcal{G}}$ pour ces actions, c'est-à-dire les ensembles de géodésiques locales définies à changements d'origine près. Si ℓ appartient à \mathcal{G} , on note toujours ℓ sa classe dans \mathcal{G}_{np} . On appellera indistinctement *topologie des géodésiques* la topologie compacte-ouverte sur \mathcal{G} et $\tilde{\mathcal{G}}$ et la topologie quotient de la topologie compacte-ouverte pour l'action par translations de \mathbb{R} sur \mathcal{G}_{np} et $\tilde{\mathcal{G}}_{np}$. Si $\tilde{\ell}$ appartient à $\tilde{\mathcal{G}}$, elle est propre et converge vers deux points distincts de $\partial_\infty \tilde{X}$ lorsque t tend vers $\pm\infty$ et on note $E(\tilde{\ell}) = (\tilde{\ell}(-\infty), \tilde{\ell}(+\infty)) \in \partial_\infty^2 \tilde{X}$. Si F est un ensemble de géodésiques de \mathcal{G} , on note $E(F) = \{E(\ell), \ell \in F\}$. Si F est un ensemble de géodésiques locales, le *support* de F , noté $\text{Supp}(F)$, est la réunion des images des éléments de F .

Si ℓ est une géodésique locale, on note ℓ^- la géodésique locale d'orientation opposée définie par $\ell^-(t) = \ell(-t)$. Enfin, la relation $r \sim r'$ s'il existe des réels T, T' tels que $r(t) = \ell(t + T)$ et $r'(t) = \ell(t + T')$ ou $r(t) = \ell(-t + T)$ et $r'(t) = \ell(-t + T')$ pour tout t appartenant aux domaines de définition respectifs de r et r' , est une relation d'équivalence sur l'ensemble des rayons géodésiques de ℓ . On appelle *bout* (au sens de Freudenthal) de ℓ une telle classe d'équivalence. Une géodésique locale a deux bouts. Puisqu'elles ne dépendent pas des paramétrages, ces définitions se prolongent aux géodésiques locales non paramétrées.

4.0.2 Ordres cycliques.

Soient Y un ensemble et Y^3 l'ensemble des triplets de points de Y . Un *ordre cyclique (total)* sur Y est une fonction $o : Y^3 \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ telle que :

- pour tout $(x, y, z) \in Y^3$, $o(x, y, z) = 0$ si et seulement si $\text{Card}(\{x, y, z\}) \leq 2$;
- pour tout $(x, y, z) \in Y^3$, $o(x, y, z) = o(y, z, x) = -o(x, z, y)$;
- pour tous les quadruplets (x, y, z, t) d'éléments de Y , si $o(x, y, z) = 1$ et $o(x, z, t) = 1$, alors $o(x, y, t) = 1$.

L'ordre cyclique *opposé* à o est $\bar{o} = -o$. Si Y est un espace topologique, on demande que la restriction de o au sous-ensemble des triplets d'éléments deux à deux distincts soit continue (pour la topologie produit). Si Y est muni d'une action d'un groupe Γ , on demande que o soit invariante pour l'action diagonale de Γ sur Y^3 . Nous renvoyons par exemple à [Wol, 2.3.1] pour des compléments sur les ordres cycliques.

Remarque 4.0.1 Si (Σ, m) est un revêtement (éventuellement trivial) d'une surface compacte, connexe, orientable, munie d'une métrique hyperbolique à bord totalement géodésique, et si $p : (\tilde{\Sigma}, \tilde{m}) \rightarrow (\Sigma, m)$ est un revêtement universel, alors le bord à l'infini de $\tilde{\Sigma}$ est homéomorphe à un sous-ensemble fermé de \mathbb{S}^1 (voir [BH, Ex. 8.11 (2) p.265 et (4) p.266]). Donc les ordres opposés usuels de \mathbb{S}^1 induisent deux ordres opposés sur $\partial_\infty \tilde{\Sigma}$. De plus, si on note Γ_Σ le groupe de revêtement de p , alors il existe un unique homéomorphisme Γ_Σ -équivariant entre $\partial_\infty(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$ et $\partial_\infty(\tilde{\Sigma}, \tilde{d})$ pour n'importe quelle distance géodésique, localement CAT(0), complète, d sur Σ , avec \tilde{d} le tiré en arrière de d , par lequel on les identifie (voir par exemple [Bon1, §2]). Dans la suite, on ne considérera que l'ordre cyclique o_∞ ainsi défini sur $\partial_\infty \tilde{\Sigma}$. Les espaces métriques $(\tilde{\Sigma}, \tilde{d})$ et $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$ sont de plus quasi-isométriques, donc il existe $\delta \geq 0$ tel que $(\tilde{\Sigma}, \tilde{d})$ est δ -hyperbolique.

4.0.3 Laminations géodésiques.

Soit (X, d) un espace métrique comme ci-dessus. On suppose qu'il existe un ordre cyclique o sur l'espace topologique $\partial_\infty \tilde{X}$ muni de l'action de Γ . Le triplet (X, d, o) est alors un espace localement CAT(0) *enrubanné*. Deux couples de points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de $\partial_\infty \tilde{X}$ sont *entrelacés* si les points sont deux à deux distincts et si $o(x_1, x_2, y_1) = -o(x_1, y_2, y_1)$.

Définition 4.0.2 Deux géodésiques de (\tilde{X}, \tilde{d}) sont dites *entrelacées* si leurs couples de points à l'infini sont entrelacés. Deux géodésiques locales ℓ_1 et ℓ_2 de (X, d) sont dites *entrelacées* si elles ont des relevés de ℓ_1 et ℓ_2 dans \tilde{X} qui sont entrelacés. Si ℓ_1 est entrelacée avec elle-même, elle est dite *auto-entrelacée*.

Nous renvoyons à la partie 4.1.1 pour le cas particulier des surfaces munies de structures de demi-translation.

Définition 4.0.3 Une *lamination géodésique* (ou simplement *lamination*) de (X, d, o) est un ensemble non vide Λ de géodésiques locales de (X, d) , définies à changements d'origine près, dont les éléments sont appelés *feuilles*, tel que :

- aucune feuille de Λ n'est auto-entrelacée ;
- les feuilles de Λ sont deux à deux non entrelacées ;
- si ℓ appartient à Λ alors ℓ^- aussi ;
- Λ est fermé pour la topologie des géodésiques.

Remark. Le choix du revêtement dans les définitions 4.0.2 et 4.0.3 est indifférent. Cette définition généralise les laminations hyperboliques (voir la partie 4.2.1). D'autres types de laminations, dans des arbres réels, ont été introduits par M. Bestvina, M. Feighn et M. Handel (voir [BFH]) et par T. Coulbois, A. Hilion et M. Lustig (voir [CHL]), mais ce ne sont pas des arbres enrubannés. Je remercie le rapporteur d'avoir suggéré d'étudier les liens entre les laminations telles qu'introduites dans [CHL] et cette définition.

Soient $p' : (X', d') \rightarrow (X, d)$ un revêtement de (X, d) , Λ une lamination de (X, d) et Λ' l'ensemble des relevés des feuilles de Λ dans X' . Alors Λ' est une lamination de (X', d') , que l'on appelle *image réciproque de Λ par p'* . Dans ce chapitre, l'espace (\tilde{X}, \tilde{d}) sera généralement δ -hyperbolique (au sens de Gromov) pour un certain $\delta \geq 0$ (voir [BH, Déf. 1.1 p. 399]), et propre. De ce fait, pour tout $(x, y) \in \partial_\infty^2 \tilde{X}$, il existe au moins une géodésique de (\tilde{X}, \tilde{d}) dont le couple de points à l'infini est (x, y) (voir [BH, Lem. 3.2 p. 428]). Dans la suite, on utilisera ce fait sans le mentionner. On rappelle un résultat découlant du théorème d'Ascoli.

Lemme 4.0.4 *Soit (Z, d) un espace métrique propre. L'ensemble des géodésiques de (Z, d) dont l'origine appartient à un compact de Z est compact pour la topologie compacte-ouverte.*

Corollaire 4.0.5 *Soit F un ensemble de géodésiques définies à changements d'origines près, qui est fermé pour la topologie des géodésiques. Alors le support de F est fermé dans Z .*

Du lemme 4.0.4 on déduit les trois lemmes élémentaires suivants, avec (Z, d) un espace géodésique, CAT(0) et propre.

Lemme 4.0.6 *Soit Y un ensemble fermé de $\partial_\infty^2 Z$ et F l'ensemble de toutes les géodésiques ℓ de (Z, d) telles que $E(\ell)$ appartient à Y . Alors F est fermé pour la topologie des géodésiques et donc $\text{Supp}(F)$ est fermé dans Z .*

Démonstration. Soit $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F qui converge vers ℓ pour la topologie des géodésiques. Alors, par définition, $E(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $E(\ell)$ dans $\partial_\infty^2 X$, $E(\ell)$ appartient à Y car Y est fermé et ℓ à F par maximalité. \square

Lemme 4.0.7 *Supposons de plus que l'espace (Z, d) est δ -hyperbolique, avec $\delta \geq 0$. Soient $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de géodésiques (non paramétrées mais orientées) de (Z, d) et pour tout $n \in \mathbb{N}$, (x_n, y_n) le couple de ses points à l'infini. Si la suite $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers (x, y) dans $\partial_\infty^2 Z$, alors quitte à extraire, la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une géodésique de (Z, d) , pour la topologie des géodésiques, dont le couple de points à l'infini est (x, y) .*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $r_{x_n} = [A, x_n[$ et $r_{y_n} = [A, y_n[$, avec $A \in Z$ fixé. Alors les suites $(r_{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_{y_n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers les rayons $r_x = [A, x[$ et $r_y = [A, y[$ pour la topologie compacte-ouverte. Puisque $x \neq y$, il existe $T > 0$ tel que $d(r_x(T), r_y(T)) \geq 2\delta + 3$. Or, pour n assez grand, on a $\max\{d(r_{x_n}(T), r_x(T)), d(r_{y_n}(T), r_y(T))\} < 1$, donc $d(r_{x_n}(T), r_{y_n}(T)) \geq 2\delta + 1$. Puisque les triangles idéaux de côtés $r_{x_n}([0, +\infty[)$, $r_{y_n}([0, +\infty[)$ et $\ell_n(\mathbb{R})$ sont δ -fins, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un point z_n de $\ell_n(\mathbb{R})$ tel que $d(r_{x_n}(T), z_n) \leq \delta$, et donc z_n appartient à la boule compacte de centre $r_x(T)$ et de rayon $\delta + 1$. On peut changer les origines pour que $\ell_n(0) = z_n$ pour tout n assez grand. Le lemme 4.0.7 est alors une conséquence du lemme 4.0.4. \square

Lemme 4.0.8 *On suppose toujours que (Z, d) est δ -hyperbolique (avec $\delta \geq 0$). Soient F un ensemble de géodésiques de (Z, d) , fermé pour la topologie des géodésiques, et Y_F l'ensemble des couples de points à l'infini des éléments de F . Alors Y_F est fermé dans $\partial_\infty^2 Z$.*

Démonstration. Soit $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Y_F qui converge vers (x, y) dans $\partial_\infty^2 Z$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note ℓ_n un élément de F dont le couple de points à l'infini est (x_n, y_n) . D'après le lemme 4.0.7, quitte à extraire, la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, pour la topologie des géodésiques, vers une géodésique dont le couple de points à l'infini est (x, y) , et elle appartient à F car F est fermé pour cette topologie. Donc Y_F est fermé. \square

4.1 Comportement des géodésiques locales d'une structure de demi-translation.

Soient $(\Sigma, [q])$ une surface connexe, orientable, à bord (éventuellement vide), munie d'une structure de demi-translation et $p : (\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}]) \rightarrow (\Sigma, [q])$ un revêtement universel. On note or_x l'ordre cyclique sur l'ensemble des germes de rayons issus d'un point x induit par un choix d'orientation de la surface et o_∞ l'ordre sur $\partial_\infty \tilde{\Sigma}$ défini dans la remarque 4.0.1. Si $\tilde{\ell}$ est une géodésique de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$, le complémentaire de $\tilde{\ell}(\mathbb{R})$ dans $\tilde{\Sigma}$ peut avoir plusieurs composantes connexes si $\tilde{\ell}(\mathbb{R})$ n'est pas disjointe de $\partial \tilde{\Sigma}$. Si $x \in \tilde{\Sigma} - \tilde{\ell}(\mathbb{R})$, on note x_\perp le projeté orthogonal de x sur $\tilde{\ell}(\mathbb{R})$. Soient r_x, r_1 et r_2 les germes de $[x_\perp, x]$, de $[x_\perp, \tilde{\ell}(+\infty)[$ et de $[x_\perp, \tilde{\ell}(-\infty)[$ issus de x_\perp .

Définition 4.1.1 *Le point $x \in \tilde{\Sigma} - \tilde{\ell}(\mathbb{R})$ appartient au côté + (resp. -) de $\tilde{\ell}$ si $or_{x_\perp}(r_1, r_x, r_2) = 1$ (resp. -1). Le côté + (resp. -) de $\tilde{\ell}$ est la réunion (non connexe a priori) des composantes connexes de $\tilde{\Sigma} - \tilde{\ell}(\mathbb{R})$ dont les points appartiennent au côté + (resp. -) de $\tilde{\ell}$.*

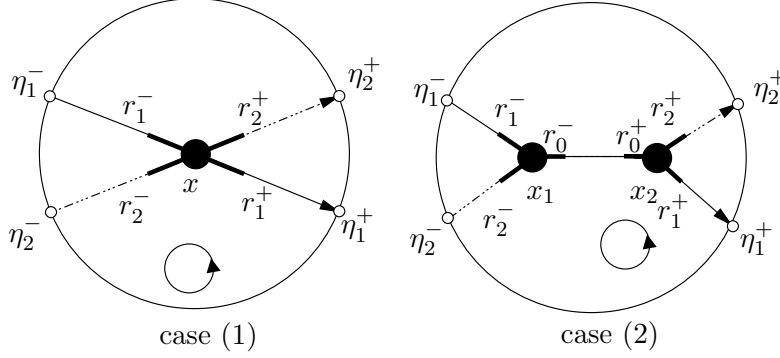
4.1.1 Comportement de deux géodésiques locales d'une structure de demi-translation.

Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux géodésiques locales paramétrées de $(\Sigma, [q])$ telles qu'il existe $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle maximal compact, non vide mais éventuellement réduit à un point, tel que $\ell_1|_I = \ell_2|_I$. Dans la suite, on notera alors $t_1 \leq t_2$ tels que $I = [t_1, t_2]$, $x_1 = \ell_1(t_1)$, $x_2 = \ell_1(t_2)$, et $r_1^-, r_2^-, r_1^+, r_2^+$ les germes de $\ell_1([t_1 - \varepsilon, t_1])$, $\ell_2([t_1 - \varepsilon, t_1])$, $\ell_1([t_2, t_2 + \varepsilon])$, $\ell_2([t_2, t_2 + \varepsilon])$ issus de x_1 et x_2 , et si $t_1 \neq t_2$, r_0^-, r_0^+ les germes de $\ell_1([t_1, t_1 + \varepsilon]) = \ell_2([t_1, t_1 + \varepsilon])$ et $\ell_1([t_2 - \varepsilon, t_2]) = \ell_2([t_2 - \varepsilon, t_2])$, pour un $\varepsilon > 0$ assez petit (voir la figure du lemme).

Soient $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ deux géodésiques de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$. Puisque $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ est CAT(0), si l'intersection des images de $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ n'est pas vide, c'est un point isolé ou une partie de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ isométrique à un intervalle fermé de \mathbb{R} . Comme les géodésiques ne peuvent changer de direction qu'au plus aux singularités, si les géodésiques n'ont pas la même image et si leur intersection n'est pas transverse, les (ou l'unique) extrémités de $\tilde{\ell}_1(\mathbb{R}) \cap \tilde{\ell}_2(\mathbb{R})$ sont des singularités. Par définition des ordres cycliques, $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ sont non entrelacées si et seulement si $\tilde{\ell}_1^i$ et $\tilde{\ell}_2^j$ sont non entrelacées (pour tout $i, j \in \{+, -\}$). Donc si leurs images sont confondues le long d'un segment ou un rayon géodésique, on peut les paramétrer pour que leurs restrictions au segment ou rayon soient égales.

Lemme 4.1.2 *Deux géodésiques $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ sont non entrelacées si et seulement si, en reprenant les notations précédentes, l'une des conditions exclusives suivantes est vérifiée :*

- (1) *Leurs images sont disjointes ;*
- (2) *Leurs images sont confondues au moins le long d'un rayon géodésique ;*
- (3) *Leurs images s'intersectent en un unique point x et $or_x(r_1^+, r_2^+, r_1^-) = or_x(r_1^+, r_2^-, r_1^-)$;*
- (4) *quitte à changer d'orientation et d'origines, leurs restrictions à un segment géodésique maximal $[x_1, x_2]$ non réduit à un point sont égales, et $or_{x_2}(r_1^+, r_2^+, r_0^+) = -or_{x_1}(r_1^-, r_2^-, r_0^-)$.*



Démonstration. Les géodésiques $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ sont non entrelacées si et seulement si $\tilde{\ell}_2(\mathbb{R})$ est contenue dans la réunion de $\tilde{\ell}_1(\mathbb{R})$ et d'un seul côté de $\tilde{\ell}_1$. Une analyse de cas montre que cela correspond aux conditions du lemme. \square

Si ℓ_1 et ℓ_2 sont des géodésiques locales de $(\Sigma, [q])$ qui s'intersectent et sont non entrelacées, l'intersection de leurs images est une réunion (non connexe a priori) de singularités et de parties de Σ localement isométriques à des intervalles fermés de \mathbb{R} , et puisque p préserve l'orientation, on a les deux corollaires suivants.

Corollaire 4.1.3 *Les géodésiques ℓ_1 et ℓ_2 sont non entrelacées si et seulement si elles vérifient : pour chaque intervalle maximal $I \subset \mathbb{R}$ tel que, quitte à changer d'orientations et d'origines, on a $\ell_1|_I = \ell_2|_I$, en reprenant les notations précédentes, l'une des conditions exclusives suivantes est vérifiée.*

- *I est de la forme $[t, +\infty[$ ou $]-\infty, t]$, avec $t \in \mathbb{R}$;*
- *$I = \{t\}$, et si $x = \ell_1(t)$, on a $or_x(r_1^+, r_2^+, r_1^-) = or_x(r_1^+, r_2^-, r_1^-)$;*
- *$I = [t_1, t_2]$ avec $t_1 < t_2$ et si $x_1 = \ell_1(t_1)$ et $x_2 = \ell_1(t_2)$, on a $or_{x_2}(r_1^+, r_2^+, r_0^+) = -or_{x_1}(r_1^-, r_2^-, r_0^-)$.*

Corollaire 4.1.4 *Deux géodésiques locales de $(\Sigma, [q])$ qui s'intersectent transversalement sont entrelacées.*

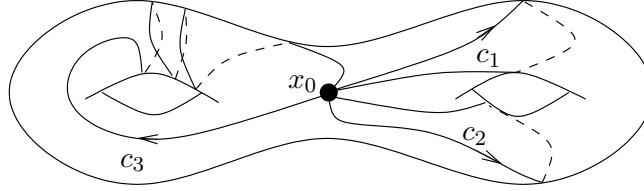
Géodésiques locales non auto-entrelacées.

On suppose dans cette partie que la surface Σ est compacte de genre $g \in \mathbb{N}$, et on note $b \in \mathbb{N}$ le nombre de composantes connexes de son bord. Soient x_0 un point de Σ et $B = (c_1, \dots, c_n)$ une suite finie d'arcs \mathcal{C}^1 orientés, simples, fermés en x_0 , que l'on peut supposer paramétrés par $[0, 1]$ avec $c_i(0) = c_i(1) = x_0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, tels que pour tout $k \neq p$, on ait $c_k([0, 1]) \cap c_p([0, 1]) = \{x_0\}$. On note, par abus, encore B la réunion $c_1([0, 1]) \cup \dots \cup c_n([0, 1])$. On munit Σ d'une distance qui induit sa topologie. Soient F_1, \dots, F_k les complétés des composantes connexes de $\Sigma - B$ (pour la distance induite). Pour tout $i = 1, \dots, k$, le complété F_i est une surface (topologique) à bord.

Lemme 4.1.5 *La caractéristique d'Euler de Σ vérifie $\chi(\Sigma) = 1 - n + \sum_1^k \chi(F_i)$.*

Démonstration. Pour tout complété F_i d'une composante connexe de $\Sigma - B$, si c est une composante du bord de F_i , on note $V_{i,c} \simeq c \times [0, \varepsilon] \subset F_i$, avec $\varepsilon > 0$ assez petit, un voisinage tubulaire de c dans F_i , et F'_i le complété de $F_i - \coprod_c V_{i,c}$ pour la métrique induite, où c parcourt l'ensemble des composantes du bord de F_i . Puisque F_i se rétracte par déformation forte sur F'_i , on a $\chi(F'_i) = \chi(F_i)$. De plus, pour tout $i = 1, \dots, k$, la sous-surface à bord F'_i se plonge dans Σ . On note U la réunion des images dans Σ des voisinages $V_{i,c}$, pour $i = 1, \dots, k$ et c une composante du bord de F_i . Alors U se rétracte par déformation forte sur B , donc $\chi(U) = \chi(B)$, et Σ est la réunion de U et des images des F'_i dans Σ (que l'on note toujours F'_i car elles se plongent dans Σ). Pour toute sous-surface à bord F'_i , l'intersection $F'_i \cap U$ est homéomorphe à un cercle, de caractéristique d'Euler nulle, et $\chi(\Sigma) = \chi(U) + \sum_1^k \chi(F'_i) = \chi(B) + \sum_1^k \chi(F_i)$. Enfin $\chi(\Sigma) = 1 - n + \sum_1^k \chi(F_i)$. \square

On dit que la suite finie (c_1, \dots, c_n) est un *bouquet plongé essentiel* en x_0 si de plus aucun arc c_i n'est librement homotope à un point, et si pour k, p distincts dans $\{1, \dots, n\}$, c_k n'est homotope ni à c_p ni à $\overline{c_p}$ relativement à x_0 (où $\overline{c_p}(t) = c_p(1 - t)$).



Lemme 4.1.6 *Si $B = (c_1, \dots, c_n)$ est un bouquet plongé essentiel en x_0 , alors $n \leq 6g + 3b - 3$.*

Démonstration. Soient F_1, \dots, F_k comme ci-dessus. Pour tout $i = 1, \dots, k$, si F_i n'est pas un disque, alors $\chi(F_i) \leq 0$. De plus, si F_i est un disque, il est bordé par au moins 3 arcs de la suite finie, car sinon il existerait deux arcs homotopes relativement à x_0 , ou un arc homotope à un point. De plus, chaque arc ne borde, au plus, que deux composantes connexes de $\Sigma - B$. Quitte à renommer, on peut supposer que les composantes F_1, \dots, F_p (où $p \leq k$) sont tous les disques. Alors $p \leq \frac{2n}{3}$. Or, d'après le lemme 4.1.5, on a $\chi(\Sigma) = 1 - n + \sum_1^k \chi(F_i)$. Puisque la caractéristique d'Euler d'un disque est 1 et $\chi(F_i) \leq 0$ si $i > p$, on a $\chi(\Sigma) \leq 1 - n + \frac{2n}{3} = 1 - \frac{n}{3}$. Puisque $\chi(\Sigma) = 2 - 2g - b$, on a bien $n \leq 6g + 3b - 3$. \square

Corollaire 4.1.7 *Si x et y sont deux points distincts de Σ et si (c_1, \dots, c_n) est une suite finie d'arcs simples joignant x à y qui sont deux à deux non homotopes relativement à x et y , et sont deux à deux d'images disjointes en dehors de x et y , alors $n \leq 6g + 3b - 2$.*

Démonstration. En écrasant $c_1([0, 1])$ en un point par une application continue de Σ qui est un homéomorphisme en dehors de $c_1([0, 1])$, on obtient un bouquet plongé essentiel de $n - 1$ arcs fermés simples en un point de Σ . D'après le lemme 4.1.6, on a $n - 1 \leq 6g + 3b - 3$, donc $n \leq 6g + 3b - 2$. \square

On considère de nouveau une structure de demi-translation $[q]$ sur Σ . Puisque Σ est compact, le nombre k de singularités de $[q]$ est fini. Si $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ est une géodésique locale et R est l'image d'un segment géodésique compact, on dit que ℓ parcourt R s'il existe au moins un intervalle compact I de \mathbb{R} tel que $\ell(I) = R$. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.1.8 Soient (X, d) un espace géodésique localement CAT(0) et (x, y) un couple de points de X . Alors il existe un unique segment géodésique dans chaque classe d'homotopie relative d'arcs joignant x à y .

Lemme 4.1.9 Soit F une famille de géodésiques locales non auto-entrelacées de $(\Sigma, [q])$ qui sont deux à deux non entrelacées. Alors il y a au plus $k^2 \cdot (6g + 3b - 2)$ liaisons de singularités qui sont parcourues par une géodésique locale de F .

Démonstration. Soient h et h' deux liaisons de singularités distinctes joignant deux singularités x et y de $[q]$. Puisque h et h' sont de direction constante, si elles s'intersectent en dehors de leurs extrémités, l'intersection est transverse. Donc, d'après le corollaire 4.1.4, si h et h' sont parcourues par des éléments de F , elles ne s'intersectent pas en dehors de leurs extrémités. De plus, d'après le lemme 4.1.8, elles ne sont pas homotopes relativement à x et y . Donc, quitte à les ordonner, la famille des liaisons de singularités joignant x et y , qui sont parcourues par des éléments de F , est une suite d'arcs simples satisfaisant les hypothèses du corollaire 4.1.7, donc il y en a au plus $6g + 3b - 2$.

Puisque $[q]$ n'a que k singularités, il y a k^2 couples de singularités. Donc il y a au plus $k^2 \cdot (6g + 3b - 2)$ liaisons de singularités qui sont parcourues par un élément de F . \square

Lemme 4.1.10 Soit $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ une géodésique locale non auto-entrelacée qui n'est pas positivement compacte. Il existe $T > 0$ tel que $\ell|_{[T, +\infty[}$ est de direction constante.

Démonstration. D'après le lemme 4.1.9 appliqué à $F = \{\ell\}$, il n'y a qu'un nombre fini de liaisons de singularités qui sont parcourues par ℓ . Puisque toutes les liaisons de singularités sont compactes, la réunion des liaisons de singularités parcourues par ℓ est compacte. Donc ℓ ne rencontre pas de singularité à partir d'un certain temps. Elle est de direction constante à partir de ce temps. \square

Si q est une différentielle quadratique holomorphe sur Σ , une *trajectoire* de q est un intervalle, un rayon ou une droite géodésique locale, verticale pour q , ne rencontrant pas de singularité, maximale (voir [Str, Déf. 5.5.3 p.25]). Si $\ell : I \rightarrow \Sigma$ est une trajectoire (I est alors un intervalle ouvert), un *rayon de trajectoire* de ℓ est une application r de la forme $\ell|_J$, où J est un sous-intervalle strict de I , non compact et fermé dans I . Si J est relativement compact, on dit que r converge vers un zéro x de q si $r(t)$ converge vers x quand t tend vers la borne supérieure, ou inférieure, de J qui n'appartient pas à I . Si J n'est pas relativement compact, on dit que r est *récurrent* s'il est dense dans un *domaine*, c'est-à-dire l'adhérence d'un ouvert connexe de Σ bordé par des réunions connexes d'images de trajectoires critiques de longueur finie et de singularités, si ce n'est pas Σ , du feuilletage vertical de q (voir [Str, p.53]). Un domaine n'est pas toujours une sous-surface de Σ car son bord peut ne pas être une sous-variété de Σ .

Lemme 4.1.11 (Voir [Str, 11.4 p.53]) Les trajectoires d'une différentielle quadratique holomorphe q d'une surface compacte Σ , à bord (éventuellement vide) sont classées dans les familles suivantes :

- (1) Les trajectoires périodiques. Elles feuillettent des cylindres plats ouverts.
- (2) Les trajectoires critiques, dont au moins un rayon converge vers une singularité. Il n'y a qu'un nombre fini de trajectoires critiques. Si un rayon d'une trajectoire critique ne converge pas vers une singularité, il admet un sous-rayon récurrent.
- (3) Les spirales, c'est-à-dire les trajectoires dont tous les rayons sont récurrents. Si α est une spirale, l'adhérence A de l'image de α est un domaine, bordé par des réunions connexes d'images de trajectoires critiques de longueur finie et de singularités, si ce n'est pas Σ .

Puisque ce sont les seules possibilités et que deux trajectoires de la liste ne peuvent avoir de point en commun à moins qu'elles ne coïncident, la surface Σ privée des zéros de q et des liaisons de singularités verticales de q se divise entre des cylindres plats ouverts (feuillets par des trajectoires périodiques) et les intérieurs des domaines qui sont les adhérences de chacune des spirales qu'ils contiennent.

Si ℓ est une géodésique locale de $(\Sigma, [q])$ telle que $\ell_{|[T, +\infty[}$ ne rencontre pas de singularité, et est donc de direction constante, quitte à choisir un autre représentant de $[q]$, on peut supposer que $\ell_{|[T, +\infty[}$ est de direction verticale pour q , et donc que c'est un rayon de trajectoire de q . D'après la classification ci-dessus, on a le corollaire suivant.

Corollaire 4.1.12 *Le rayon $\ell_{|[T, +\infty[}$ est périodique ou récurrent et dans le second cas, son image est dense dans un domaine du feuilletage vertical de q .*

4.2 Image au bord à l'infini d'une famille de géodésiques.

4.2.1 Rappels sur les laminations géodésiques hyperboliques.

Soient Σ une surface connexe, orientable, à bord (éventuellement vide), et m une métrique hyperbolique à bord totalement géodésique (complète) sur Σ . Dans cette partie 4.2.1, la surface Σ peut avoir des points enlevés. Une *lamination hyperbolique* Λ_m est une partie non vide fermée de Σ , réunion d'images de géodésiques locales hyperboliques, simples et deux à deux disjointes. L'espace (Σ, m) est localement CAT(0). Soit $p : (\tilde{\Sigma}, \tilde{m}) \rightarrow (\Sigma, m)$ un revêtement universel. Le bord à l'infini $\partial_\infty \tilde{\Sigma}$ est muni de l'ordre o_∞ défini dans la remarque 4.0.1, et on est dans le cadre de la partie 4.0.1. On considère alors les paramétrages (à changements d'origine près) des géodésiques hyperboliques locales de Λ_m , dans chaque sens. On note $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ l'image réciproque de Λ_m dans $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$. Les géodésiques de $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ sont deux à deux disjointes et donc deux à deux non entrelacées. De plus, la métrique est hyperbolique, donc puisque le support de $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ est fermé dans $\tilde{\Sigma}$, l'ensemble des couples de points à l'infini des éléments de $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ est fermé dans $\partial_\infty^2 \tilde{\Sigma}$ (d'après [Pen, Lem. 1.6.1 p.68]), et pour chaque élément $(x, y) \in \partial_\infty^2 \tilde{\Sigma}$, il existe une unique géodésique (à changement d'origine près) dont le couple de points à l'infini est (x, y) . D'après le lemme 4.0.6, l'ensemble $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ est fermé pour la topologie des géodésiques. C'est donc une lamination au sens de la définition 4.0.3, et puisque il est Γ_Σ -équivariant (où Γ_Σ est le groupe de revêtement de p), l'ensemble des projetés des feuilles de $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ est une lamination de (Σ, m) . Dans la suite de cette partie, on appellera Λ_m cet ensemble et support de Λ_m la réunion $\text{Supp}(\Lambda_m)$ des images de ses éléments dans Σ .

La lamination Λ_m est *minimale* si elle ne contient pas de sous-lamination stricte. Une *composante minimale* d'une lamination est une sous-lamination minimale. Si $\text{Supp}(\Lambda_m)$ est compact, Λ_m est minimale si et seulement si l'image de tout rayon géodésique de toute feuille de Λ_m est dense dans le support de Λ_m .

Supposons que (Σ, m) soit d'aire finie. Le complété \overline{D} d'une composante connexe D du complémentaire de $\text{Supp}(\Lambda_m)$ dans Σ , pour la distance induite, est une surface hyperbolique à bord totalement géodésique, d'aire finie. Il est obtenu en rajoutant abstraitement à D un bord qui est la réunion des images d'un nombre fini de feuilles de Λ_m . En particulier, le bord du complété de D a un nombre fini de pointes, chacune délimitée par deux géodésiques du bord (éventuellement égales, voir [Bon2, p.7]).

On dit qu'un bout e d'une géodésique locale simple λ *spirale* sur une lamination Λ_m de (Σ, m) si λ n'intersecte pas le support de Λ_m et si pour tout rayon r dans la classe de e , le support de Λ_m

est l'ensemble des points d'accumulation de $r(t)$ quand t tend vers $+\infty$ (voir la partie 4.0.1 pour la définition d'un bout).

Lemme 4.2.1 *Soit Λ_m une lamination de (Σ, m) . On considère une feuille λ de Λ_m , un bout e de λ (correspondant à $t \rightarrow +\infty$), et C une composante minimale compacte de Λ_m . Alors e spirale sur C si et seulement s'il existe une feuille λ_0 de C dont le point à l'infini (pour $t \rightarrow +\infty$) d'un relevé est égal au point à l'infini d'un relevé d'un rayon dans la classe de e .*

Démonstration. On fixe un paramétrage de λ . Supposons qu'il existe une feuille λ_0 de C dont un relevé $\tilde{\lambda}_0$ a le même point à l'infini (pour $t \rightarrow +\infty$) que celui d'un relevé $\tilde{\lambda}$ de λ . La projection $p : (\tilde{\Sigma}, \tilde{m}) \rightarrow (\Sigma, m)$ n'augmente pas les distances, et par une propriété bien connue de la géométrie hyperbolique, on sait que quitte à changer d'origine $d(\tilde{\lambda}_0(t), \tilde{\lambda}(t))$ tend vers 0, et donc $d(\lambda(t), \lambda_0(t))$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini. Donc l'ensemble des points d'accumulation de $\lambda(t)$ quand t tend vers l'infini est égal à celui de $\lambda_0(t)$, qui est le support de C car C est minimale et compacte.

Réciproquement, supposons que le support de C soit l'ensemble limite de $\lambda(t)$ (pour $t \rightarrow +\infty$). Si λ appartient à C , on prend $\lambda_0 = \lambda$. Sinon, l'image de λ est contenue dans une composante D du complémentaire du support de C , et on a vu que le complété \overline{D} de D est obtenu en recollant abstraitement un bord à D qui est la réunion des images d'un nombre fini de feuilles de C . Puisque le bout e s'accumule sur C , la géodésique λ converge vers une pointe du bord de \overline{D} , et donc il existe une feuille λ_0 de C , abstraitement contenue dans le bord de \overline{D} telle que, quitte à changer d'origine, la distance $d(\lambda(t), \lambda_0(t))$ tend vers 0. Il existe alors des relevés $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\lambda}_0$ de λ et λ_0 tels que $d(\tilde{\lambda}(t), \tilde{\lambda}_0(t))$ tend vers 0. \square

Soient Λ_m une lamination géodésique de (Σ, m) et $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ son image réciproque dans $\tilde{\Sigma}$. Si Σ n'a pas de bord mais des points enlevés, la lamination Λ_m est *quasi-maximale* si les complétés des composantes connexes du complémentaire du support de Λ_m dans Σ sont des triangles géodésiques idéaux ou des monogones géodésiques idéaux privés d'un point. Si (Σ, m) est une surface compacte, à bord (éventuellement vide) totalement géodésique, Λ_m est *quasi-maximale* si aucune composante de bord n'appartient à Λ_m et si les complétés des composantes connexes du complémentaire du support de la lamination sont des triangles géodésiques idéaux ou des monogones géodésiques idéaux privés d'un disque.

Lemme 4.2.2 *Si (Σ, m) est une surface hyperbolique, connexe, compacte, à bord totalement géodésique, il existe au moins une lamination sur (Σ, m) qui est à la fois minimale et quasi-maximale si et seulement si Σ n'est pas un pantalon.*

Démonstration. Soient (Σ_1, m_1) la surface hyperbolique complète obtenue en recollant des bouts évasés à bord géodésique sur chacune des composantes de bord de Σ et m'_1 une métrique hyperbolique sur Σ_1 , complète et d'aire finie. Puisque Σ n'est pas un pantalon, la surface Σ_1 n'est pas la sphère privée de trois points. Il existe alors une lamination Λ_1 de (Σ_1, m'_1) qui est à la fois minimale, quasi-maximale et de support compact, donc dont les feuilles ne finissent pas dans les pointes (voir par exemple la démonstration de [Ham, Lem. 2.3 p. 10-11]). En étendant naturellement la bijection naturelle de [Bon2, Lem. 18] entre laminations géodésiques à support compact, pour des métriques hyperboliques qui ne sont pas nécessairement d'aire finie, on montre qu'il existe une unique lamination géodésique de (Σ, m) en bijection avec Λ_1 , qui est minimale et quasi-maximale comme Λ_1 . Enfin, si Σ est un pantalon, les seules laminations minimales sont les géodésiques du bord, qui ne sont pas quasi-maximales. \square

4.2.2 Liens entre géodésiques locales hyperboliques et plates.

On suppose dans cette partie 4.2.2 que Σ est compacte et munie d'une structure de demi-translation $[q]$ ainsi que d'une métrique hyperbolique m (à bord totalement géodésique) sur Σ , et on fixe $p : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ un revêtement universel. On note Γ_Σ le groupe de revêtement de p , $[\tilde{q}]$ et \tilde{m} les relevés de $[q]$ et m . Les espaces $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ et $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$ sont CAT(0) et puisque Σ est compacte, il existe un unique homéomorphisme Γ_Σ -équivariant entre les bords à l'infini de $\tilde{\Sigma}$ pour les métriques \tilde{m} et $[\tilde{q}]$ par lequel on les identifie (voir par exemple [Bon1, §2]).

Si G est un ensemble de géodésiques de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$ deux à deux non entrelacées, alors $\text{Supp}(G)$ est fermé dans $\tilde{\Sigma}$ si et seulement si $E(G)$ est fermé dans $\partial_\infty^2 \tilde{\Sigma}$ (voir [Pen, Lem. 1.6.1 p. 68] et la partie 4.0.1 pour les définitions de $\text{Supp}(G)$ et $E(G)$). Dans le cas des ensembles de géodésiques plates, cette équivalence est fausse. Par exemple, si on considère l'ensemble F des géodésiques plates parallèles d'images contenues dans une bande plate de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$, privée des bords, alors $E(F)$ est un unique couple alors que F n'est pas fermé. Dans cette partie, nous étudions le lien entre ensembles de géodésiques plates et ensembles de géodésiques hyperboliques.

On appelle *lamination plate* une lamination géodésique au sens de la définition 4.0.3 d'une surface munie d'une structure de demi-translation. On dit qu'elle est *pleine* si son image réciproque dans $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ n'est pas une sous-lamination stricte d'une lamination plate ayant le même ensemble de couples de points à l'infini de feuilles. Toute lamination plate $\Lambda_{[q]}$ est contenue dans une unique lamination plate pleine $\Lambda_{[q]}^{\text{pl}}$ ayant le même ensemble de couples de points à l'infini au revêtement universel et $\Lambda_{[q]}^{\text{pl}} - \Lambda_{[q]}$ est composé de feuilles périodiques (voir le lemme 4.2.5). Si λ et ℓ sont des géodésiques locales (non paramétrées mais orientées) de (Σ, m) et $(\Sigma, [q])$, on dit que λ *correspond* à ℓ s'il existe des relevés $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\ell}$ de λ et ℓ ayant le même couple de points à l'infini, et on dit qu'une lamination hyperbolique *correspond* à une lamination plate si leurs images réciproques au revêtement universel ont les mêmes ensembles de couples de points à l'infini de feuilles. À toute géodésique locale plate correspond une unique géodésique locale hyperbolique. De plus, si $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$ est l'image réciproque par p d'une lamination plate $\Lambda_{[q]}$, et si Y est l'ensemble des couples de points à l'infini des feuilles de $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$, alors Y est Γ_Σ et ι -invariant (où $\iota : (x, y) \mapsto (y, x)$), les couples d'éléments de Y sont deux à deux non entrelacés et Y est fermé dans $\partial_\infty^2 \tilde{\Sigma}$ d'après le lemme 4.0.8. D'après [Pen, Lem. 1.6.1 p.68], il existe donc une unique lamination hyperbolique $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$ telle que $E(\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}) = Y$, et $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ est Γ_Σ -invariante par naturalité. Donc l'ensemble Λ_m des projetés des feuilles de $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ est l'unique lamination hyperbolique de (Σ, m) qui correspond à $\Lambda_{[q]}$ (par construction).

Lemme 4.2.3 *L'application qui à une lamination plate associe l'unique lamination hyperbolique qui lui correspond induit une bijection entre l'ensemble des laminations plates pleines et l'ensemble des laminations hyperboliques.*

Démonstration. Montrons que la restriction de cette application aux laminations plates pleines est surjective. Soient Λ_m une lamination hyperbolique de (Σ, m) , et $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ son image réciproque par p . On note $Y = E(\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}})$, $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}^{\text{pl}}$ l'ensemble maximal de géodésiques de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ (définies à changements d'origine près) tel que pour tout $\tilde{\ell} \in \tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}^{\text{pl}}$ il existe $\tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ qui correspond à $\tilde{\ell}$.

Comme pour $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$, les géodésiques de $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}^{\text{pl}}$ ne sont pas entrelacées et $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}^{\text{pl}}$ est stable par $\ell \mapsto \ell^-$. Enfin, puisque Y est fermé dans $\partial_\infty^2 \tilde{\Sigma}$, et puisque l'ensemble $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}^{\text{pl}}$ contient toutes les géodésiques plates dont le couple de points à l'infini appartient à Y , d'après le lemme 4.0.6, l'ensemble $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}^{\text{pl}}$

est fermé pour la topologie des géodésiques, donc c'est une lamination plate pleine. Et comme $\tilde{\Lambda}_m$, l'ensemble $\tilde{\Lambda}_{[q]}^{\text{pl}}$ est Γ_Σ -équivariant, donc l'ensemble $\Lambda_{[q]}^{\text{pl}}$ des projetés des feuilles de $\tilde{\Lambda}_{[q]}^{\text{pl}}$ par p est une lamination plate de $(\Sigma, [q])$, et Λ_m correspond à $\Lambda_{[q]}^{\text{pl}}$. Donc la restriction de l'application aux laminations plates pleines est surjective. Par définition des laminations plates pleines, elle est aussi injective. \square

On rappelle le théorème de la bande plate. On dit que deux géodésiques c et c' d'un espace métrique (X, d) sont à distance de Hausdorff finie s'il existe $K > 0$ tel que $d(c(t), c'(t)) \leq K$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Théorème 4.2.4 (voir [BH, Th. 2.13 p.182]) Soient (X, d) un espace métrique CAT(0) et $c, c' : \mathbb{R} \rightarrow X$ deux géodésiques. Si c et c' sont à distance de Hausdorff finie, l'enveloppe convexe de $c(\mathbb{R}) \cup c'(\mathbb{R})$ est isométrique à une bande plate $\mathbb{R} \times [0, D] \subset \mathbb{E}^2$, avec $D \geq 0$.

Lemme 4.2.5 (voir [MS1, Th. 2.(c)]) On rappelle que Σ est compacte. Soient $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ deux géodésiques de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$, telles que $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ sont à distance de Hausdorff finie et qu'il existe $\delta > 0$ tel que $d(\tilde{\ell}_1(t), \tilde{\ell}_2(\mathbb{R})) \geq \delta$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors les projetés $p \circ \tilde{\ell}_1$ et $p \circ \tilde{\ell}_2$ de $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ sur Σ sont des géodésiques périodiques qui sont contenues dans un cylindre plat maximal, dont l'intérieur est plongé isométriquement dans $(\Sigma, [q])$.

Corollaire 4.2.6 Soit Λ_m une lamination hyperbolique de (Σ, m) qui ne contient pas de feuille fermée. Alors il existe une unique lamination plate $\Lambda_{[q]}$ telle que Λ_m corresponde à $\Lambda_{[q]}$. Elle est pleine et chaque feuille de Λ_m ne correspond qu'à une seule feuille de $\Lambda_{[q]}$.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux géodésiques (non paramétrées) distinctes $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ qui ont le même couple de points à l'infini qu'un relevé $\tilde{\lambda}$ d'une feuille λ de Λ_m . Alors d'après le théorème 4.2.4, les géodésiques $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ sont contenues dans une même bande plate, et il existe $\delta > 0$ tel que tout point de l'une est à distance δ de l'autre. Donc, d'après le lemme 4.2.5, les projetés $\ell_1 = p \circ \tilde{\ell}_1$ et $\ell_2 = p \circ \tilde{\ell}_2$ sont périodiques. Mais alors il existe un élément hyperbolique γ du groupe de revêtement de p , tel que $\tilde{\lambda}(-\infty) = \tilde{\ell}_1(-\infty)$ et $\tilde{\lambda}(+\infty) = \tilde{\ell}_2(+\infty)$ sont respectivement les points fixes répulsif et attractif de γ , et λ serait fermée. Donc chaque feuille de Λ_m ne correspond qu'à une seule géodésique locale de $(\Sigma, [q])$, et Λ_m ne correspond qu'à une seule lamination plate. \square

4.2.3 Laminations plates minimales.

Dans cette partie 4.2.3, on suppose toujours que Σ est compact et $\chi(\Sigma) < 0$ et on note $p : (\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}]) \rightarrow (\Sigma, [q])$ un revêtement universel de groupe de revêtement Γ_Σ . De même que pour une lamination hyperbolique, une lamination plate est *minimale* si elle ne contient pas de sous-lamination stricte, ou de manière équivalente, si pour chacune de ses feuilles ℓ , la paire $\{\ell, \ell^-\}$, où ℓ^- est la feuille ℓ orientée dans l'autre sens, est dense dans la lamination, pour la topologie des géodésiques. Une lamination plate $\Lambda_{[q]}$ est minimale si et seulement si elle n'a pas deux feuilles périodiques distinctes qui soient librement homotopes et si la lamination hyperbolique Λ_m qui lui correspond est minimale. C'est notamment le cas si Λ_m est minimale et n'est pas une feuille fermée. On considère deux lemmes généraux.

Lemme 4.2.7 Si $\Lambda_{[q]}$ est une lamination plate minimale de $(\Sigma, [q])$, qui n'est pas une paire de feuilles périodiques opposées, aucune de ses feuilles n'est positivement périodique.

Démonstration. Supposons par contraposée qu'il existe une feuille ℓ de $\Lambda_{[q]}$ qui est positivement périodique. Alors quitte à changer son origine, elle est égale, à partir d'un certain temps, à une géodésique locale périodique ℓ' et il existe une suite de réels $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers l'infini telle que $\ell(t_n) = \ell'(0)$ pour tout n . Alors la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\ell_n(t) = \ell(t + t_n)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ converge vers ℓ' pour la topologie compacte-ouverte, et ℓ' appartient à $\Lambda_{[q]}$ car $\Lambda_{[q]}$ est fermée pour la topologie des géodésiques. Par minimalité, $\Lambda_{[q]} = \{\ell', \ell'^-\}$. \square

Soient Λ_m une lamination hyperbolique et C une composante minimale de Λ_m qui n'est pas une feuille fermée. Si λ_2 est une feuille de C et si λ_1 est une feuille de Λ_m dont le bout (pour $t \rightarrow +\infty$) spirale sur C , il existe des géodésiques locales plates ℓ_1 et ℓ_2 , uniques à changements d'origine près, qui correspondent à λ_1 et λ_2 . On fixe des paramétrages de λ_1 , λ_2 , ℓ_1 et ℓ_2 .

Lemme 4.2.8 *Pour tout relevé paramétré $\tilde{\ell}_2$ de ℓ_2 dans $\tilde{\Sigma}$, quitte à inverser l'orientation de $\tilde{\ell}_2$, il existe une suite de réels $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers l'infini, et une suite de relevés (paramétrés) $(\tilde{\ell}_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ de ℓ_1 tels que la suite de feuilles paramétrées $(\tilde{\ell}'_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $\tilde{\ell}'_{1,n}(t) = \tilde{\ell}_{1,n}(t + t_n)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, converge vers $\tilde{\ell}_2$ pour la topologie compacte-ouverte.*

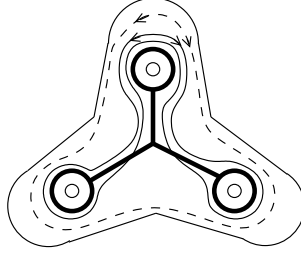
Démonstration. Soit $\tilde{\lambda}_2$ le relevé de λ_2 qui correspond à $\tilde{\ell}_2$. Puisque le bout de λ_1 (pour $t \rightarrow +\infty$) spirale sur C , il existe une suite de réels $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers l'infini telle que $\lambda_1(s_n)$ converge vers $\lambda_2(0)$, et il existe une suite $(\tilde{\lambda}_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ de relevés de λ_1 telle que la suite $(\tilde{\lambda}_{1,n}(s_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{\lambda}_2(0)$. D'après le lemme 4.0.4, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on reparamètre $\tilde{\lambda}_{1,n}$ pour que $\tilde{\lambda}_{1,n}(s_n)$ soit l'origine, quitte à extraire et à inverser l'orientation de $\tilde{\lambda}_2$, la suite $(\tilde{\lambda}_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{\lambda}_2$ pour la topologie compacte-ouverte, et donc la suite des couples de points à l'infini des feuilles $(\tilde{\lambda}_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le couple de points à l'infini de $\tilde{\lambda}_2$. Soient $(\tilde{\ell}_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de relevés de ℓ_1 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le relevé $\tilde{\lambda}_{1,n}$ corresponde à $\tilde{\ell}_{1,n}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\tilde{\ell}_{1,n}(t_n)$ soit un point de $\tilde{\ell}_{1,n}(\mathbb{R})$ le plus proche de $\tilde{\ell}_2(0)$. Puisque Σ est compacte, il existe $\delta > 0$ tel que $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ est δ -hyperbolique, et d'après le lemme 4.0.7 et la définition de $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, quitte à extraire, la suite $(\tilde{\ell}'_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\tilde{\ell}'_{1,n}(t) = \tilde{\ell}_{1,n}(t + t_n)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, converge vers $\tilde{\ell}_2$ pour la topologie compacte-ouverte.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\gamma_n \in \Gamma_\Sigma$ tel que $\tilde{\ell}_{1,n} = \gamma_n \tilde{\ell}_{1,1}$, et puisque $\tilde{\ell}_{1,n}$ et $\tilde{\lambda}_{1,n}$ ont le même couple de points à l'infini, on a $\tilde{\lambda}_{1,n} = \gamma_n \tilde{\lambda}_{1,1}$. Puisque Γ_Σ agit par isométries sur $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$, on en déduit que $d(\tilde{\ell}_{1,n}(0), \tilde{\lambda}_{1,n}(0)) = d(\tilde{\ell}_{1,1}(0), \tilde{\lambda}_{1,1}(0))$, où d est la distance définie par la structure de demi-translation. De même, les points $\tilde{\ell}_{1,n}(t_n)$ et $\tilde{\lambda}_{1,n}(s_n)$ restent à distance bornée. De plus, puisque Σ est compacte, les revêtements $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ et $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{m}])$ sont quasi-isométriques, donc les géodésiques hyperboliques $\tilde{\lambda}_{1,n}$ sont des quasi-géodésiques de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ (voir par exemple [BH, Prop. 8.19 et Déf. 8.22 p. 140-142]). Donc la distance $d(\tilde{\lambda}_{1,n}(s_n), \tilde{\lambda}_{1,n}(0))$ tend vers l'infini et donc la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l'infini. \square

Corollaire 4.2.9 *Soit $\Lambda_{[q]}$ une lamination plate minimale qui n'est pas une paire de feuilles périodiques opposées. Alors si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux feuilles de $\Lambda_{[q]}$ et $\tilde{\ell}_2$ est un relevé de ℓ_2 dans $\tilde{\Sigma}$, quitte à inverser l'orientation de $\tilde{\ell}_2$, il existe une suite de relevés de ℓ_1 qui converge vers $\tilde{\ell}_2$ pour la topologie des géodésiques. De plus, l'image de chacun des rayons géodésiques de chacune des feuilles de $\Lambda_{[q]}$ est dense dans le support de $\Lambda_{[q]}$.*

Démonstration. On applique le lemme 4.2.8 en prenant pour C la lamination hyperbolique Λ_m correspondant à $\Lambda_{[q]}$, qui est minimale et n'est pas une feuille fermée, en remarquant que chacun

des bouts de chacune des feuilles de Λ_m spirale sur Λ_m . La deuxième assertion du corollaire vient du fait que p n'augmente pas les distances. \square



Remarque 4.2.10 Une lamination plate peut ne pas être minimale même si les images de tous les rayons géodésiques de toutes ses feuilles sont denses dans son support. Par exemple, on considère la surface de demi-translation ci-dessus, dont les singularités sont d'angle 3π et situées aux sommets du graphe en gras. Alors la réunion des deux géodésiques plates correspondant aux deux courbes périodiques dessinées (et de leurs inverses) est une lamination plate telle que l'image de chacun des rayons géodésiques de chacune des feuilles est égale au graphe. Mais la lamination n'est pas minimale.

Lemme 4.2.11 Soit $\Lambda_{[q]}$ une lamination plate minimale de $(\Sigma, [q])$ qui n'est pas une paire de feuilles périodiques opposées. Supposons qu'il existe une feuille de $\Lambda_{[q]}$ dont l'image est compacte. Alors toutes les feuilles de $\Lambda_{[q]}$ ont la même image, et l'image de chacun des rayons de chacune des feuilles lui est égale.

Démonstration. Soient ℓ_1, ℓ_2 des feuilles de $\Lambda_{[q]}$. D'après le corollaire 4.2.9, si $\tilde{\ell}_2$ est un relevé de ℓ_2 , quitte à inverser l'orientation de $\tilde{\ell}_2$, il existe une suite de relevés de ℓ_1 qui converge vers $\tilde{\ell}_2$ pour la topologie des géodésiques.

Supposons que l'image de ℓ_1 est compacte. Si ℓ_1 était régulière, son image serait contenue dans un cylindre plat et ℓ_1 serait périodique, et on aurait $\Lambda_{[q]} = \{\ell_1, \ell_1^-\}$. Donc l'image de ℓ_1 est contenue dans une union finie de liaisons de singularités. Si K est une boule compacte de $\tilde{\Sigma}$ qui intersecte l'image de $\tilde{\ell}_2$, il n'y a qu'un nombre fini de liaisons de singularités contenues dans K qui se projettent sur une liaison de singularités parcourue par ℓ_1 . Et puisque $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ est CAT(0), tout segment géodésique parcourt au plus une fois chacune de ces liaisons de singularités. Il n'y a donc qu'un nombre fini de segments géodésiques dont l'image est contenue dans la réunion de ces liaisons de singularités, et la suite $(\tilde{\ell}_{1,n|K})_{n \in \mathbb{N}}$ des restrictions des feuilles $\tilde{\ell}_{1,n}$ à K est constante à partir d'un certain rang, égale à $\tilde{\ell}_{2|K}$. On en déduit que l'image de $p(\tilde{\ell}_{2|K})$ est contenue dans l'image de ℓ_1 , et ceci étant vrai pour toutes les boules compactes, l'image de ℓ_2 est contenue dans celle de ℓ_1 , et en particulier compacte. De même, l'image de ℓ_1 est contenue dans celle de ℓ_2 , donc elles sont égales. Toutes les feuilles de $\Lambda_{[q]}$ ont donc la même image qui est la réunion d'un nombre fini de liaisons de singularités et de singularités. La deuxième assertion du lemme est une conséquence du lemme 4.2.8. \square

J'hésite à supprimer ce paragraphe qui introduit beaucoup de notations pour une simple présentation de la motivation.

Dans [Lev, par. § 3], G. Levitt introduit une notion, que nous appelons *droite singulière*, dans un feuilletage \mathcal{F} à singularités de type selle à au moins trois branches d'une surface simplement

connexe. On note Z l'ensemble des singularités de ce feuilletage et \mathcal{F}' le feuilletage (sans singularités) de $\Sigma - Z$ défini par \mathcal{F} . Les *feuilles régulières* de \mathcal{F} sont les feuilles du feuilletage \mathcal{F}' , et les *feuilles singulières* de \mathcal{F} sont les réunions connexes par arcs pleines de feuilles de \mathcal{F}' et de singularités, qui contiennent au moins une singularité. Une feuille de \mathcal{F}' qui joint deux singularités (éventuellement confondues) est appelée une *liaison de selles* de \mathcal{F} . Si $z \in Z$ est une singularité et f est la feuille singulière contenant z , deux liaisons de singularités l_1 et l_2 de \mathcal{F} dont une extrémité est z sont *adjacentes* si, en notant U un voisinage de z tel que U ne contienne pas d'autre singularité que z , alors l_1 et l_2 bordent la même composante connexe de $\Sigma - f$. Soit γ une réunion connexe par arcs de liaisons de singularités et de singularités, contenue dans une feuille singulière de \mathcal{F} . On dit que γ vérifie la condition (C_1) si pour tout $s \in Z - Z \cap \partial\Sigma$ appartenant à γ , exactement deux liaisons de singularités issues de s appartiennent à γ et sont adjacentes, et si $x \in \gamma \cap \partial\Sigma$, alors x est une extrémité de γ . Il existe alors une application \mathcal{C}^1 par morceaux, injective $f : I \rightarrow \Sigma$, où I est un intervalle, dont l'image est γ . On peut alors munir γ de l'orientation induite par f et l'orientation de la surface Σ permet de définir deux côtés en tout point de $\gamma \cap (Z - Z \cap \partial\Sigma)$. Soient $x \in \gamma \cap (Z - Z \cap \partial\Sigma)$ et $f'(x)^-$ et $f'(x)^+$ les dérivées à gauche et à droite de f en x . Si $v \in T_x\Sigma$ est un vecteur tangent en x , on dit que v *sort à droite* de γ si les vecteurs du triplet ordonné $(-f'(x)^-, v, f'(x)^+)$ sont dans l'ordre trigonométrique direct, et qu'il *sort à gauche* sinon.

Une réunion connexe de liaisons de singularités et de points de Z contenue dans une feuille singulière de $\mathcal{F}_{\Sigma-P}$ est une *droite singulière* si elle satisfait la condition (C_1) et si toutes les séparatrices issues des points de $\gamma \cap (Z - Z \cap \partial\Sigma)$ sortent du même côté. Alors l'ensemble des couples de points à l'infini des droites singulières et des feuilles régulières du feuilletage est fermé dans $\partial_\infty^2 \tilde{\Sigma}$ (voir [Lev, lemme 2, p. 124]).

Une géodésique $\tilde{\ell}$ de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ est une *feuille de Levitt* s'il existe au moins une composante connexe $\tilde{\Sigma}^+$ de $\tilde{\Sigma} - \tilde{\ell}(\mathbb{R})$ telle que

- $\tilde{\ell}(\mathbb{R})$ est une composante de bord du complété de $\tilde{\Sigma}^+$ pour la distance induite ;
- pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'angle défini par les germes de $\tilde{\ell}([t - \varepsilon, t])$ et $\tilde{\ell}([t, t + \varepsilon])$, avec $\varepsilon > 0$, mesuré dans $\tilde{\Sigma}^+$, est égal à π .

La notion de feuille de Levitt non régulière correspond aux droites singulières du relevé d'un feuilletage introduites par G. Levitt dans [Lev]. On appelle $\tilde{\Sigma}^+$ un *côté sans angle* de $\tilde{\ell}$.

En un point donné, qui n'est pas une singularité de $[\tilde{q}]$, ne passent au plus que deux feuilles de Levitt ayant une direction donnée (à changement d'orientation près), et s'il y en a deux, alors l'intersection de leurs côtés sans angle est vide. Une feuille de Levitt est entièrement déterminée par la donnée de son côté sans angle (à changement d'orientation près). On appelle *feuille de Levitt* de $(\Sigma, [q])$ le projeté d'une feuille de Levitt de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$. Une feuille de Levitt est de direction constante.

Supposons qu'il existe une feuille ℓ_0 de $\Lambda_{[q]}$ dont l'image n'est pas compacte. D'après les lemmes 4.1.10 et 4.1.11, elle admet un rayon géodésique $\ell_0|_{[T, +\infty[}$, avec $T > 0$, ne rencontrant pas de singularité, qui est de direction constante et est dense dans un domaine du feuilletage vertical $\mathcal{F}_{q'}$ d'une différentielle quadratique holomorphe q' de la classe $[q]$, que l'on note D . D'après le corollaire 4.2.9, tous les rayons géodésiques des feuilles de $\Lambda_{[q]}$ sont denses dans le support de $\Lambda_{[q]}$, qui est donc égal à D . Puisque $\ell_0([T, +\infty[)$ est dense dans D et puisque les autres feuilles de $\Lambda_{[q]}$ n'intersectent pas transversalement $\ell_0|_{[T, +\infty[}$, toutes les feuilles de $\Lambda_{[q]}$ sont de direction constante et de même direction. En particulier, la feuille ℓ_0 est de direction constante. On note $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$ l'image réciproque de $\Lambda_{[q]}$ dans $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$.

Lemme 4.2.12 *On suppose que $\Lambda_{[q]}$ est une lamination plate minimale qui n'est pas une paire de feuilles périodiques opposées, et contient une feuille ℓ_0 qui n'est pas d'image compacte. La lamination plate $\Lambda_{[q]}$ est alors égale à l'ensemble des feuilles de Levitt qui sont d'image contenue dans D et de même direction que ℓ_0 , privé (éventuellement) des feuilles de Levitt d'image contenue dans le bord de D .*

Démonstration. On a vu que le support de la lamination plate $\Lambda_{[q]}$ est D et qu'aucun segment de feuille de $\Lambda_{[q]}$ n'a une autre direction que celle de ℓ_0 . Donc $\Lambda_{[q]}$ contient l'ensemble des feuilles régulières du feuilletage vertical $\mathcal{F}_{q'}$ de q' , de même direction que ℓ_0 , qui sont denses dans D .

Montrons que l'ensemble E des feuilles de Levitt $\tilde{\ell}$ d'image contenue dans $p^{-1}(D)$ et de même direction qu'un relevé de ℓ_0 , telle que l'image de $\tilde{\ell}$ est contenue dans l'adhérence de l'intersection $\text{Supp}(\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}) \cap \tilde{\Sigma}^+$, où $\tilde{\Sigma}^+$ est un côté sans angle de $\tilde{\ell}$, est contenu dans $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$.

Soit $\tilde{\ell}_1$ une feuille de E . Il existe $\tilde{x} \in \tilde{\ell}_1(\mathbb{R})$ qui n'est pas une singularité de $[\tilde{q}]$, et $(\tilde{\ell}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de feuilles régulières de $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$, dont l'origine appartient à un côté sans angle $\tilde{\Sigma}^+$ de $\tilde{\ell}_1$, telle que $(\tilde{\ell}_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \tilde{x} . D'après le lemme 4.0.4, quitte à extraire, la suite $(\tilde{\ell}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une feuille $\tilde{\ell}_2$ de $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$ passant par \tilde{x} , pour la topologie des géodésiques. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la feuille $\tilde{\ell}_n$ est régulière et son origine appartient à $\tilde{\Sigma}^+$, donc la géodésique $\tilde{\ell}_2$ est une feuille de Levitt passant par \tilde{x} , de même direction que $\tilde{\ell}_1$, et elle a un côté sans angle contenant $\tilde{\ell}_n(0)$, pour n assez grand. Donc ce côté sans angle a une intersection non vide avec $\tilde{\Sigma}^+$. On a vu qu'il est alors égal à $\tilde{\Sigma}^+$, et donc $\tilde{\ell}_2 = \tilde{\ell}_1$ à changement d'orientation et d'origine près. Donc $\tilde{\ell}_1$ appartient à $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$.

Réciproquement, montrons que $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$ est contenu dans E . Nous avons vu que l'ensemble des feuilles de Levitt régulières, contenues dans $p^{-1}(D)$, de même direction qu'un relevé de ℓ_0 , est contenu dans $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$, et la réunion de leurs images est dense dans $p^{-1}(D)$. Soient $\tilde{\ell}_1$ l'une d'elles et $\tilde{\ell}_2$ une feuille quelconque de $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$. Puisque $\Lambda_{[q]}$ est minimale et n'est pas une paire de feuilles périodiques opposées, d'après le corollaire 4.2.9, il existe une suite de relevés paramétrés $(\tilde{\ell}_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ de $\tilde{\ell}_1 = p(\tilde{\ell}_1)$ qui converge vers $\tilde{\ell}_2$ pour la topologie des géodésiques. Or, l'image d'un relevé de $\tilde{\ell}_1$ dans $\tilde{\Sigma}$ est disjointe de $\partial\tilde{\Sigma}$, car sinon elle serait contenue dans $\partial\tilde{\Sigma}$, et l'image de $\tilde{\ell}_1$ serait contenue dans $\partial\tilde{\Sigma}$ (et ne serait pas dense dans D), et est disjointe de l'image de $\tilde{\ell}_2$ car les relevés de $\tilde{\ell}_1$ sont réguliers, distincts de $\tilde{\ell}_2$, et ils ne sont pas entrelacés avec $\tilde{\ell}_2$. Quitte à extraire, il existe une composante connexe $\tilde{\Sigma}^+$ de $\tilde{\Sigma} - \tilde{\ell}_2(\mathbb{R})$ qui contient toutes les feuilles de la suite. Comme $(\tilde{\ell}_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{\ell}_2$ pour la topologie des géodésiques, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'angle défini par les germes $\tilde{\ell}_2([t - \varepsilon, t])$ et $\tilde{\ell}_2([t, t + \varepsilon])$, avec $\varepsilon > 0$, mesuré dans $\tilde{\Sigma}^+$, est égal à π . Donc $\tilde{\ell}_2$ est une feuille de Levitt dont $\tilde{\Sigma}^+$ est un côté sans angle. De plus, par construction, l'image de $\tilde{\ell}_2$ est dans l'adhérence de $\tilde{\Sigma}^+ \cap \text{Supp}(\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]})$. Donc $\tilde{\ell}_2$ appartient à E .

Montrons enfin que l'ensemble $p(E)$ des projetés des éléments de E dans Σ est égal à l'ensemble des feuilles de Levitt d'image contenue dans D et de même direction que ℓ_0 , privé (éventuellement) des feuilles de Levitt d'image contenue dans le bord de D . Par définition, tout élément de $p(E)$ est une feuille de Levitt d'image contenue dans D , de même direction que ℓ_0 , et puisque son image est dense dans D , elle n'est pas contenue dans le bord de D . Réciproquement, soit ℓ une feuille de Levitt d'image contenue dans D , qui n'est pas contenue dans le bord de D , de même direction que ℓ_0 . Soient $\tilde{\ell}$ un relevé de ℓ , $\tilde{\Sigma}^+$ un côté sans angle de $\tilde{\ell}$, et $\tilde{x} \in \tilde{\ell}(\mathbb{R})$ tel que \tilde{x} appartient à l'intérieur de $p^{-1}(D)$. Alors il existe une suite de feuilles $(\tilde{\ell}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$ d'image contenue dans l'adhérence de $\tilde{\Sigma}^+$, dont on peut fixer les paramétrages de sorte que $(\tilde{\ell}_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \tilde{x} .

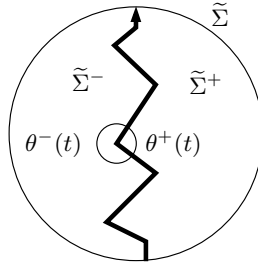
Comme précédemment, la suite $(\tilde{\ell}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{\ell}$ pour la topologie des géodésiques, donc $\tilde{\ell}(\mathbb{R})$ est contenue dans l'adhérence de $\tilde{\Sigma}^+ \cap \text{Supp}(\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]})$. Donc $\tilde{\ell}$ est un élément de E . \square

4.2.4 Rayons asymptotiques.

Dans cette partie 4.2.4, on suppose toujours que $(\Sigma, [q])$ est une surface compacte, à bord (éventuellement vide), munie d'une structure de demi-translation et $p : (\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}]) \rightarrow (\Sigma, [q])$ est un revêtement universel. On caractérise maintenant les rayons géodésiques de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ ayant le même point à l'infini. La notion de rayon géodésique quasi-droit vient de [Dan, § 3.4].

Soit $\tilde{r} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \tilde{\Sigma}$ un rayon géodésique de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$. On peut prolonger \tilde{r} (de manière non unique et indifférente) en une géodésique. On dit que \tilde{r} rencontre une composante \tilde{b} du bord de $\tilde{\Sigma}$ du côté $+$ (resp. $-$) à l'instant t si \tilde{b} est contenue dans la réunion de l'image de $\tilde{\ell}$ et de son côté $+$ (resp. $-$, voir la définition 4.1.1), et si $\tilde{r}(t)$ appartient à \tilde{b} .

On dit que \tilde{r} est *quasi-droit* si quitte à inverser $+/-$, le rayon \tilde{r} ne rencontre pas de composante de bord du côté $+$ à partir d'un instant $t_0 > 0$, et si, pour $t > t_0$, on note $\theta^+(t)$ l'angle défini par les germes de \tilde{r} issus de $\tilde{r}(t)$, mesuré du côté $+$, on a $\sum_{t > t_0} (\theta^+(t) - \pi) < +\infty$. On dit alors que $+$ est un côté quasi-droit de \tilde{r} . Un point $\eta \in \partial_\infty \tilde{\Sigma}$ est *quasi-droit* s'il existe un rayon géodésique quasi-droit \tilde{r} tel que $\tilde{r}(+\infty) = \eta$.



Lemme 4.2.13 (voir [Dan, Prop. 3.10])

- Soient \tilde{r}_1 et \tilde{r}_2 deux rayons géodésiques de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ tels que $\tilde{r}_1(+\infty) = \tilde{r}_2(+\infty)$. Alors si l'un n'est pas quasi-droit, il existe $T_1, T_2 \geq 0$ tel que $\tilde{r}_1(t + T_1) = \tilde{r}_2(t + T_2)$ pour tout t assez grand.
- Soit $\eta \in \partial_\infty \tilde{\Sigma}$ un point quasi-droit. Alors tout rayon géodésique \tilde{r} de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ tel que $\tilde{r}(+\infty) = \eta$ est quasi-droit.

Démonstration. Supposons par exemple que \tilde{r}_1 n'est pas quasi-droit. Soit $\tilde{\ell}$ une géodésique qui prolonge \tilde{r}_1 comme ci-dessus. Si l'image de \tilde{r}_2 intersecte $\tilde{\ell}(\mathbb{R})$ en un point, alors puisque $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ est CAT(0), le rayon \tilde{r}_2 est confondu avec $\tilde{\ell}$ à partir de ce point. Supposons par l'absurde que l'image de \tilde{r}_2 est contenue dans une composante connexe (ouverte) du côté $+$ de $\tilde{\ell}$ (quitte à échanger $+$ et $-$).

Ou bien il existe une suite réelle $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers l'infini, telle que \tilde{r}_1 rencontre une composante de bord du côté $+$ en $\tilde{r}_1(t_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais alors, puisque $\tilde{r}_2(+\infty) = \tilde{r}_1(+\infty)$, il existerait des instants t_n tel que \tilde{r}_2 intersecte l'image de \tilde{r}_1 en $\tilde{r}_1(t_n)$.

Ou bien il existe $T > 0$ tel que \tilde{r}_1 ne rencontre pas de composante de bord du côté $+$ à partir de l'instant T , et alors $\sum_{t > T} (\theta^+(t) - \pi) = +\infty$. On peut reprendre alors les démonstrations des lemmes [Dan, Lem. 3.10] et [Dan, Prop. 3.3]. Il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $t_n > T$, telle que $\theta^+(t_n) > \pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les points $\tilde{r}_1(t_n)$ sont alors des singularités, et puisque les singularités sont isolées, on en déduit que, quitte à extraire, $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l'infini, et $\tilde{r}_1(t_n)$ tend vers $\tilde{r}_1(+\infty)$. De plus,

puisque $\theta^+(t_n) > \pi$ pour tout n , il existe des géodésiques \tilde{c}_n dont les origines sont les points $\tilde{r}_1(t_n)$, qui ne rencontrent $\tilde{\ell}(\mathbb{R})$ qu'en leurs origines. On renvoie à [Dan, Prop. 3.3] pour la démonstration que la condition $\sum_{t>T}(\theta^+(t) - \pi) = +\infty$ implique que les points à l'infini $\tilde{c}_n(\pm\infty)$ tendent vers $\tilde{r}_1(+\infty)$ quand n tend vers l'infini (pour la topologie de $\partial_\infty \tilde{\Sigma}$). Donc si l'image de \tilde{r}_2 est disjointe de $\tilde{\ell}(\mathbb{R})$, pour n assez grand, le rayon \tilde{r}_2 intersecte $\tilde{c}_n([0, +\infty[)$ et $\tilde{c}_n(]-\infty, 0])$ le long de deux composantes connexes disjointes, ce qui est impossible dans un espace CAT(0). Donc \tilde{r}_1 et \tilde{r}_2 sont confondus à partir d'un certain temps.

Le deuxième point du lemme se démontre à partir du premier par la contraposée. \square

Lemme 4.2.14 *Soient $\ell_1 : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ une géodésique locale positivement compacte de $(\Sigma, [q])$ dont l'image n'est pas contenue dans l'adhérence d'un cylindre plat non dégénéré et $\tilde{\ell}_1$ un relevé de ℓ_1 dans $\tilde{\Sigma}$. Soit $\tilde{\ell}_2$ une géodésique de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ telle que $\tilde{\ell}_2(+\infty) = \tilde{\ell}_1(+\infty)$. Alors les géodésiques $\tilde{\ell}_2$ et $\tilde{\ell}_1$ coïncident à partir d'un certain temps, quitte à changer les origines, et donc $\ell_2 = p \circ \tilde{\ell}_2$ coïncide aussi avec ℓ_1 à partir de ce temps.*

Démonstration. Considérons d'abord un côté de $\tilde{\ell}_1$, noté $+$. Si $\tilde{\ell}_1$ rencontre des composantes de bord du côté $+$ en des temps arbitrairement grands, alors le côté $+$ n'est pas quasi-droit. Supposons que $\tilde{\ell}_1$ ne rencontre pas de composante de bord du côté $+$ à partir d'un instant $T_1 > 0$. Puisque ℓ_1 est positivement compacte, il existe $T_0 > T_1$ tel que l'ensemble $\{\theta^+(t), t > T_0\}$, défini par $\tilde{\ell}_1$, ne prend qu'un nombre fini de valeurs qui apparaissent chacune une infinité de fois dans la somme $\sum_{t>T_0}(\theta^+(t) - \pi)$. En particulier, cette somme vaut 0 si chacune de ces valeurs est nulle et $+\infty$ sinon. Puisque $\ell_1([T_0, +\infty[)$ n'est pas contenue dans l'adhérence d'un cylindre plat non dégénéré, il existe t_+ tel que $\theta^+(t_+) - \pi > 0$, donc cette somme vaut $+\infty$. Dans les deux cas, le côté $+$ n'est pas quasi-droit. De même, le côté $-$, s'il existe, n'est pas quasi-droit. Donc $\tilde{\ell}_1|_{[0, +\infty[}$ n'est pas quasi-droit. D'après le lemme 4.2.13, les deux géodésiques $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ coïncident à partir d'un certain temps, à changement d'origine près. \square

Lemme 4.2.15 *Soit $\ell_1 : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ une géodésique locale périodique de $(\Sigma, [q])$ dont l'image est contenue dans l'adhérence d'un cylindre plat non dégénéré. Soient $\tilde{\ell}_1$ un relevé de ℓ_1 dans $\tilde{\Sigma}$ et \tilde{B} la bande plate maximale contenant $\tilde{\ell}_1(\mathbb{R})$, dont on fixe des paramétrages des composantes de bord. Soit $\tilde{\ell}_2$ une géodésique de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ telle que $\tilde{\ell}_2(+\infty) = \tilde{\ell}_1(+\infty)$. Alors si $\tilde{\ell}_2(\mathbb{R})$ n'est pas contenue dans \tilde{B} , la géodésique ℓ_2 coïncide avec un des bords \tilde{b} de \tilde{B} à partir d'un certain temps, quitte à changer les origines et les orientations, et donc $\ell_2 = p \circ \tilde{\ell}_2$ coïncide avec $b = p \circ \tilde{b}$ à partir de ce temps.*

Démonstration. La démonstration de ce lemme se déduit facilement de la démonstration de [Dan, Prop. 3.10]. Quitte à inverser leur orientation, les bords de \tilde{B} ont le même couple de points à l'infini que $\tilde{\ell}_1$. De plus, ils n'ont qu'un seul côté quasi-droit. Puisque $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ est CAT(0), si $\tilde{\ell}_2$ intersecte un bord de \tilde{B} en un point, elle est confondue avec ce bord à partir de ce point. Supposons par l'absurde que $\tilde{\ell}_2(\mathbb{R})$ est contenue dans $\tilde{\Sigma} - \tilde{B}$. On considère le bord \tilde{b} de \tilde{B} tel que $\tilde{\ell}_2(\mathbb{R})$ est contenue dans une composante connexe du complémentaire de \tilde{B} correspondant au côté $+$ (quitte à échanger) de \tilde{b} , qui n'est pas quasi-droit. On montre de même que dans la démonstration du lemme 4.2.13 que \tilde{b} et $\tilde{\ell}_2$ sont confondus à partir d'un certain temps. \square

De même que dans la partie 4.2.3, on considère une métrique hyperbolique m , à bord totalement géodésique, sur Σ , ainsi qu'une lamination plate minimale $\Lambda_{[q]}$ qui n'est pas une paire de feuilles périodiques opposées et Λ_m la lamination hyperbolique minimale qui lui correspond. On note $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$ et $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ leurs images réciproques par p .

Lemme 4.2.16 *Supposons que $\Lambda_{[q]}$ soit un ensemble de feuilles de Levitt denses dans un domaine (voir le lemme 4.2.12). Alors si λ est une géodésique de (Σ, m) qui spirale sur Λ_m , et si ℓ est la géodésique locale plate à laquelle elle correspond (qui est unique à changement d'origine près), il existe une feuille ℓ_1 de $\Lambda_{[q]}$ telle que ℓ et ℓ_1 coïncident à partir d'un certain temps (quitte à changer les origines).*

Démonstration. D'après le lemme 4.2.1, il existe une feuille ℓ_0 de $\Lambda_{[q]}$ dont un relevé à le même point à l'infini qu'un relevé de ℓ . Puisque les feuilles de $\Lambda_{[q]}$ ne sont pas positivement compactes, d'après le lemme 4.2.14, ℓ n'est pas positivement compacte. Puisqu'elle n'est pas auto-entrelacée, d'après le lemme 4.1.10, elle ne rencontre pas de singularité et est donc de direction constante à partir d'un certain temps, soit $T > 0$. Comme ℓ_0 est dense dans le support de $\Lambda_{[q]}$, qui est un domaine d'un feuilletage de direction constante (voir le lemme 4.2.12), on peut paramétrer ℓ_0 pour que son origine appartienne à l'intérieur du support de $\Lambda_{[q]}$. Alors, d'après le lemme 4.2.8, il existe $t > T$ tel que $\ell(t)$ soit arbitrairement proche de $\ell_0(0)$, et donc appartienne à l'intérieur du support de $\Lambda_{[q]}$. Puisque ℓ et ℓ_0 ne sont pas entrelacées, si $\ell([t, +\infty[)$ n'est pas contenue dans l'image de ℓ_0 , le rayon $\ell_{|[t, +\infty[}$ n'intersecte pas $\ell_0(\mathbb{R})$, et puisque $\ell_0(\mathbb{R})$ est dense dans le support de $\Lambda_{[q]}$, il a la même direction que ℓ_0 . Donc $\ell_{|[t, +\infty[}$ est un rayon d'au moins une feuille de Levitt de même direction que ℓ_0 , qui n'est pas contenue dans le bord de $\text{Supp}(\Lambda_{[q]})$. C'est donc un rayon d'une feuille de $\Lambda_{[q]}$ d'après le lemme 4.2.12. \square

4.3 Lamination plate minimale de support un graphe fini.

Dans cette partie, on cherche à savoir à quelle condition un graphe métrique fini peut être plongé isométriquement dans une surface compacte munie d'une structure de demi-translation telle qu'il soit le support d'une lamination plate minimale (qui ne soit pas une paire de feuilles périodiques opposées). Nous utiliserons les définitions et conventions sur les graphes de [Ser]. On confond un graphe et sa réalisation topologique, et on le munit d'une distance géodésique telle que chaque demi-arête soit isométrique à un intervalle compact de \mathbb{R} . On supposera de plus qu'il est connexe et sans sommet terminal. La *valence* d'un point est le cardinal de l'ensemble des germes de rayons issus de ce point. Un *arbre simplicial* est un graphe simplement connexe dont la longueur des arêtes est minorée par une constante strictement positive.

Soit G un graphe. Une *orientation cyclique* de G est la donnée, pour chaque sommet x de G , d'un ordre cyclique sur l'ensemble des germes de rayons géodésiques issus de x . On appelle *graphes cycliquement ordonnés* les graphes munis d'une orientation cyclique.

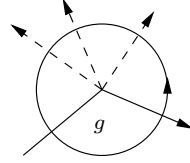
Remarque 4.3.1 *Soit (T, or) un arbre simplicial cycliquement ordonné, et $\partial_\infty T$ son bord à l'infini. Si a, b, c sont des points deux à deux distincts de $\partial_\infty T$, on note $t = t(a, b, c)$ le centre du tripode défini par a, b et c ($t =]a, b[\cap]a, c[\cap]b, c[$), et r_a, r_b, r_c les germes issus de t définis par $[t, a[, [t, b[, [t, c[$. On pose alors $o(a, b, c) = or_t(r_a, r_b, r_c)$. La fonction $o : (\partial_\infty T)^3 \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ ainsi définie (avec $o(a, b, c) = 0$ si a, b, c ne sont pas deux à deux distincts) est un ordre cyclique sur $\partial_\infty T$, et l'application f qui à une orientation cyclique de T associe l'ordre cyclique total sur $\partial_\infty T$ ainsi défini, est injective (voir [Wol, Prop. 3.9]).*

Si (G, or) est un graphe fini cycliquement ordonné, et si $p : \tilde{G} \rightarrow G$ est un revêtement universel, alors \tilde{G} est un arbre simplicial et il existe une unique orientation cyclique \tilde{or} sur \tilde{G} telle que p préserve l'orientation cyclique, qui définit un ordre cyclique sur $\partial_\infty \tilde{G}$. De plus, la valence de chaque

sommet de \tilde{G} est finie. Donc \tilde{G} est CAT(0) et propre, et on est dans les conditions de la partie 4.0.1 pour définir des laminations géodésiques sur de tels graphes.

Soient (G, or) un graphe cycliquement ordonné et $(\Sigma, [q])$ une surface munie d'une structure de demi-translation tels qu'il existe un plongement isométrique ϕ de G dans $(\Sigma, [q])$. On dit que ϕ *préserve l'orientation cyclique* si en notant or^Σ l'orientation cyclique induite sur $\phi(G)$ par un choix d'orientation de Σ , alors $\phi : (G, or) \rightarrow (\phi(G), or^\Sigma)$ préserve l'orientation cyclique.

Une géodésique locale $g : \mathbb{R} \rightarrow G$ *serre à droite* si pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $g(t)$ est un sommet de G , le germe de $g([t, t + \varepsilon[)$ succède à celui de $g(]t - \varepsilon, t])$ (pour $\varepsilon > 0$), pour l'ordre $or_{g(t)}$ (i.e. si on note r_1 et r_2 les germes de $g([t, t + \varepsilon[)$ et de $g(]t - \varepsilon, t])$, alors pour tout germe r_3 distinct de r_1 et r_2 , on a $or_{g(t)}(r_3, r_1, r_2) = 1$).



Chaque arête de G est parcourue dans les deux sens par deux géodésiques locales qui serrent à droite, éventuellement égales, qui sont uniques (à changement d'origine près).

Théorème 4.3.2 *Soit (G, or) un graphe fini cycliquement ordonné (connexe et sans sommet terminal). Alors G est le support d'une lamination minimale non dénombrable, donc dont aucune feuille n'est positivement ou négativement périodique, si et seulement si (G, or) n'est pas isomorphe à un cercle, une paire d'haltères, un huit plat ou un théta plat, par un isomorphisme préservant l'orientation cyclique (c'est-à-dire $\bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \ominus$, où les orientations cycliques sont données par l'orientation du plan).*

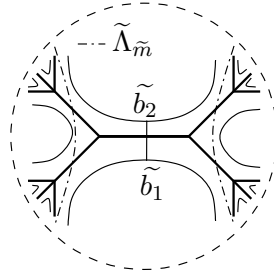
Démonstration. Décrivons le plongement classique de G dans une surface munie d'une structure de demi-translation. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow G$ une géodésique locale qui serre à droite. Puisque G est fini, il existe au moins deux réels $t_1 < t_2$ et $\varepsilon > 0$ tels que les germes de $g|_{[t_1, t_1 + \varepsilon[}$ et de $g|_{[t_2, t_2 + \varepsilon[}$ sont égaux, et puisque g est déterminée par la donnée d'un de ses germes, la géodésique locale g est périodique. Puisque G est fini, l'ensemble des géodésiques locales qui serrent à droite (à changements d'origine près) est fini et chaque arête est parcourue dans les deux sens par deux éléments de cet ensemble, éventuellement égaux.

Le long de chaque élément de cet ensemble, on recolle, par isométrie locale, un cylindre plat de hauteur 1 et de la bonne circonférence, le long de l'une de ses composantes de bord et on note (Σ, d) l'espace métrique ainsi obtenu et toujours G le plongé de G dans (Σ, d) . Alors par construction, chaque point de Σ qui n'est pas un sommet de valence supérieure ou égale à trois de G admet un voisinage isométrique à un ouvert du demi-plan supérieur fermé de \mathbb{R}^2 (muni de la métrique euclidienne), et chaque sommet de valence supérieure ou égale à trois de G est une singularité conique d'angle $k\pi$, où $k \geq 3$ est sa valence. De plus, les cylindres plats sont recollés le long de géodésiques locales de direction constante. Donc si on les feuillette par des feuilles parallèles à leur bord, on construit ainsi un champ de droites parallèle sur (Σ, d) . Enfin, chacun des cylindres plats est orientable, et puisque les recollements en chaque sommet sont ordonnés selon l'ordre cyclique sur les germes de rayons issus du sommet, la surface Σ est orientable. On a vu dans la partie 2.3

que d est définie par une structure de demi-translation, soit $[q]$. On peut choisir l'orientation de Σ pour que le plongement de G dans Σ préserve l'orientation.

La surface compacte Σ ne peut être ni un disque, ni une sphère, ni un tore. Supposons que Σ n'est ni un cylindre ni un pantalon. Alors $\chi(\Sigma) < 0$ et il existe une métrique hyperbolique m à bord totalement géodésique sur Σ . D'après le lemme 4.2.2, il existe au moins une lamination minimale et quasi-maximale sur (Σ, m) , qui est non dénombrable. Soit $\Lambda_{[q]}$ l'unique lamination plate à laquelle elle correspond, qui est aussi minimale et non dénombrable (voir la partie 4.2.2 pour la définition de cette correspondance).

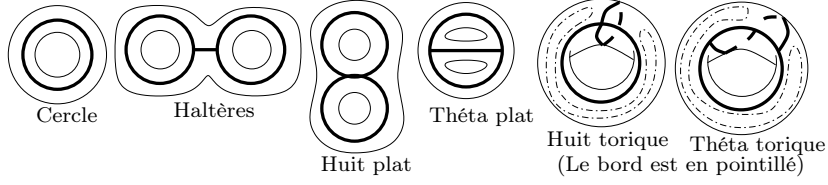
Supposons qu'il existe un point d'une feuille ℓ de $\Lambda_{[q]}$ qui n'appartienne pas à G . Si ℓ n'est pas parallèle à une composante du bord, alors ℓ rencontre transversalement une composante du bord, ce qui est impossible car ℓ est définie sur \mathbb{R} . Donc ℓ est parallèle à une composante du bord, et donc périodique, ce qui est impossible car $\Lambda_{[q]}$ est minimale et non dénombrable. Donc le support de $\Lambda_{[q]}$ est contenu dans G .



On note $\tilde{\Lambda}_{[q]}$ et $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ les images réciproques de $\Lambda_{[q]}$ et Λ_m dans $\tilde{\Sigma}$. Supposons qu'il existe une arête a de G qui n'est parcourue par aucune feuille de $\Lambda_{[q]}$. Alors si $\tilde{a} : [-r, r] \rightarrow \tilde{\Sigma}$ est un relevé paramétré de a (avec $r > 0$), en notant A et B les ensembles de points de $\partial_\infty \tilde{\Sigma}$ qui sont respectivement les extrémités des rayons qui ont le même germe que $\tilde{a}|_{[0, r[}$ ou $\tilde{a}|_{]-r, 0]}$, aucune feuille de $\tilde{\Lambda}_{[q]}$ n'a ses points à l'infini appartenant respectivement à A et B , et de même pour $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$. Donc le plus court segment géodésique de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$ qui joint les composantes de bord \tilde{b}_1 et \tilde{b}_2 dont les points à l'infini appartiennent respectivement à A et B (voir la figure), n'est intersecté par aucune feuille de $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$, et il existe une composante du complémentaire du support de $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ dont le complété a au moins \tilde{b}_1 et \tilde{b}_2 comme composantes de $\partial \tilde{\Sigma}$ dans son bord. Or, puisque Λ_m est quasi-maximale, les complétés des composantes connexes du complémentaire de $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ dans $\tilde{\Sigma}$ sont des triangles géodésiques idéaux ou des polygones géodésiques idéaux dont un seul côté n'est pas une feuille mais une composante du bord de $\tilde{\Sigma}$. Donc chaque arête de G est parcourue par au moins une feuille de $\Lambda_{[q]}$. D'après le lemme 4.2.11, chaque feuille parcourt toutes les arêtes.

Si Σ est un cylindre plat, les feuilles d'une lamination de $(\Sigma, [q])$ sont périodiques. De même, si Σ était un pantalon et s'il existait une lamination non dénombrable sur $(\Sigma, [q])$, la lamination hyperbolique lui correspondant serait non dénombrable, ce qui est impossible sur un pantalon hyperbolique. Il reste donc à déterminer les graphes finis enrubannés dont la surface munie d'une structure de demi-translation associée, construite ci-dessus, soit un pantalon. Soient (G, or) un tel graphe et $(\Sigma, [q])$ le pantalon plat associé. Puisque Σ se rétracte par déformation forte sur G , le groupe fondamental de G en un point quelconque est isomorphe au groupe fondamental de Σ au même point, et est donc un groupe libre à deux générateurs. Le graphe G est donc homéomorphe à un graphe de type huit, haltères, ou thêta. Si G est homéomorphe à un graphe de type haltères, quitte à prendre le symétrique d'une haltère par rapport à l'axe, on montre qu'il n'existe qu'une

seule orientation cyclique sur G , sinon il existe deux orientations cycliques sur G (à isomorphisme préservant l'orientation cyclique près). On montre alors que Σ n'est un pantalon que si G est le graphe des haltères, du θ plat ou du huit plat. \square



4.4 Théorème de structure des laminations géodésiques plates.

Dans cette partie, on donne un théorème de structure des laminations géodésiques sur une surface compacte munie d'une structure de demi-translation. On note de nouveau $(\Sigma, [q])$ une surface connexe, orientable, à bord (éventuellement vide), munie d'une structure de demi-translation et on suppose que Σ est compacte et $\chi(\Sigma) < 0$.

Soit $\Lambda_{[q]}$ une lamination plate. On appelle *composante cylindrique* de $\Lambda_{[q]}$ un ensemble maximal de feuilles de $\Lambda_{[q]}$ contenues dans un cylindre plat non dégénéré fermé (elles sont alors périodiques). Une *composante minimale* est une sous-lamination minimale. Une composante minimale est dite de *type graphe fini* si son support est un graphe fini (nécessairement sans sommet terminal), et de *type récurrent* si c'est la réunion des feuilles de Levitt locales contenues dans son support et de même direction, privé éventuellement des feuilles de Levitt d'image contenue dans le bord de son support (voir la définition précédant le lemme 4.2.12). Si ℓ est une géodésique plate, on dit qu'un de ses bouts *aboutit* dans une composante cylindrique s'il existe un rayon géodésique correspondant à ce bout qui coïncide avec un bord du cylindre plat maximal correspondant, à partir d'un certain temps (elle peut être disjointe des feuilles de la composante cylindrique), et qu'elle *aboutit* dans une composante minimale s'il existe un rayon géodésique correspondant à ce bout qui est un rayon d'une feuille de cette composante minimale.

Théorème 4.4.1 *Soit $\Lambda_{[q]}$ une lamination plate sur une surface compacte munie d'une structure de demi-translation $(\Sigma, [q])$. Alors $\Lambda_{[q]}$ est la réunion d'un nombre fini de composantes cylindriques, d'un nombre fini de composantes minimales (de type récurrent ou graphe fini ou paire de feuilles périodiques opposées d'images non contenues dans un cylindre plat non dégénéré) et d'un nombre fini de feuilles isolées (pour la topologie des géodésiques) dont chacun des bouts aboutit dans une composante minimale ou dans une composante cylindrique.*

Remark. Si les supports de deux composantes minimales de type récurrent s'intersectent, l'intersection ne peut être qu'une réunion de points isolés et de liaisons de singularités qui n'est pas connexe a priori, contenue dans leurs bords. De même, le support d'une composante minimale de type récurrent ne peut intersecter le cylindre plat contenant le support d'une composante cylindrique que le long du bord du cylindre, et deux cylindres plats maximaux qui contiennent des composantes cylindriques ne peuvent s'intersecter que le long de leur bord. On ne peut rien dire, a priori, de l'intersection des autres types de composantes.

Démonstration. On fixe une métrique hyperbolique m (à bord totalement géodésique) sur Σ . On renvoie à la partie 4.2.2 pour les notations et la définition de lamination hyperbolique correspondant

à une lamination plate. Soit Λ_m la lamination hyperbolique qui correspond à $\Lambda_{[q]}$. Puisque Σ est compacte, d'après par exemple [CEM, Th. 1.4.2.8 p. 83], la lamination Λ_m est la réunion disjointe d'un nombre fini de composantes minimales et d'un nombre fini de géodésiques isolées dont chacun des bouts spirale sur une composante minimale. D'après le corollaire 4.2.6, chaque composante minimale de Λ_m qui n'est pas une feuille fermée correspond à une unique composante minimale de $\Lambda_{[q]}$, qui est de type graphe fini si elle contient une géodésique d'image compacte, et de type récurrent sinon (d'après les lemmes 4.2.11 et 4.2.12). De plus, si une géodésique de Λ_m est périodique et si elle ne correspond pas à une unique feuille périodique de $\Lambda_{[q]}$, elle correspond à un ensemble maximal d'au moins deux feuilles de $\Lambda_{[q]}$, d'image contenue dans un cylindre plat d'après le lemme 4.2.5, qui est fermé pour la topologie des géodésiques, d'après le lemme 4.0.6. Cet ensemble est donc une composante cylindrique.

Enfin, si le bout d'une feuille de Λ_m spirale sur une composante minimale de Λ_m , le bout de la géodésique plate qui lui correspond aboutit sur la composante cylindrique ou la composante minimale de $\Lambda_{[q]}$ correspondante, d'après les lemmes 4.2.14, 4.2.15 et 4.2.16. \square

Chapitre 5

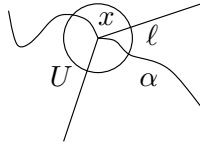
Laminations géodésiques plates mesurées.

5.1 Définition des laminations géodésiques plates mesurées.

On renvoie à [Mor2] pour la définition des laminations plates. Dans cette partie, on définit les laminations plates mesurées et on munit leur ensemble d'une topologie.

Soit $(\Sigma, [q])$ une surface connexe, orientable, à bord (éventuellement vide), munie d'une structure de demi-traslation. On appelle *arc* une application \mathcal{C}^1 par morceaux $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ qui est un homéomorphisme sur son image. Soit Λ une lamination plate de $(\Sigma, [q])$. Un arc α est *transverse* à une feuille ou segment de feuille ℓ de Λ si

- α est transverse à ℓ en dehors des singularités de $[q]$ et des points singuliers de α ;
- pour toute singularité x de $[q]$ ou point singulier de α appartenant à $\text{Image}(\ell) \cap \alpha([0, 1])$, il existe un voisinage U de x qui est un disque topologique, et un segment S de ℓ tels que $U - \text{Image}(S) \cap U$ a deux composantes connexes et les composantes connexes de $U \cap (\alpha([0, 1]) - \{x\})$ sont contenues dans des composantes distinctes de $U - \text{Image}(S) \cap U$;



- α n'est tangent à $\text{Image}(\ell)$ ni en 0 ni en 1.

On dit que α est *transverse à un ensemble F de feuilles* ou de segments de feuilles de Λ si α est transverse à chacun des éléments de F , et que F est *transverse à α* si α est transverse à F . Notamment, un arc est transverse à Λ s'il est transverse à chacune des feuilles de Λ .

Si $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ est un arc de Σ , on note $G(\alpha)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{G}_{[q]}$ (l'ensemble des géodésiques paramétrées de $(\Sigma, [q])$) transverses à α dont l'origine appartient à $\alpha([0, 1])$. Soit $F_1 \subseteq \mathcal{G}_{[q]}$ tel que $[F_1] \subseteq \Lambda$ et soient α_1 et α_2 deux arcs disjoints, transverses à F_1 , tels que $F_1 \subseteq G(\alpha_1)$ et tout élément de F_1 intersecte $\alpha_2([0, 1])$ en un temps positif. Pour tout $g_1 \in F_1$, on note $t_{g_1} = \min\{t > 0 : g_1(t) \in \alpha_2([0, 1])\}$, et F_2 le sous-ensemble des éléments $g_2 \in G(\alpha_2)$ tels qu'il existe $g_1 \in F_1$ telle que $g_2(t) = g_1(t + t_{g_1})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Une *holonomie* $h : F_1 \rightarrow F_2$ de Λ est un

homéomorphisme entre F_1 et F_2 défini par $h(g_1) = g_2 : t \mapsto g_1(t + t_{g_1})$ tel qu'il existe une homotopie $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Sigma$ entre α_1 et α_2 telle que :

- pour tout $t \in [0, 1]$, l'application $s \mapsto H(s, t)$ est un arc transverse à chacun des segments de feuilles $g_1|_{[0, t_{g_1}]}$, pour $g_1 \in F_1$;
- pour tout $\ell \in F_1$, il existe $s_\ell \in [0, 1]$ tel que $t \mapsto H(s_\ell, t)$ soit un segment de ℓ (à reparamétrage près) ;
- les intersections $H([0, 1] \times]0, 1[) \cap \alpha_i([0, 1])$ pour $i = 1, 2$ sont vides.

Définition 5.1.1 Une mesure transverse à Λ est la donnée pour tout arc α transverse à Λ d'une mesure de Radon μ_α sur $G(\alpha)$ telle que :

- (1) Le support de μ_α est l'ensemble $\{\ell \in G(\alpha) : [\ell] \in \Lambda\}$;
- (2) si $h : F_1 \rightarrow F_2$ est une holonomie de Λ , avec $F_1 \subset G(\alpha_1)$ et $F_2 \subset G(\alpha_2)$, où F_1 est un borélien de $G(\alpha_1)$ et α_1 et α_2 sont deux arcs transverses à F_1 , alors $h_*(\mu_{\alpha_1|_{F_1}}) = \mu_{\alpha_2|_{F_2}}$;
- (3) μ_α est ι -invariante, où $\iota(\ell) = \ell^- : t \mapsto \ell(-t)$;
- (4) si $\alpha'([0, 1]) \subseteq \alpha([0, 1])$, alors $\mu_{\alpha|_{G(\alpha')}} = \mu_{\alpha'}$.

On notera (Λ, μ) une lamination plate munie d'une mesure transverse, que l'on appellera *lamination plate mesurée*, et $\mathcal{ML}_p(\Sigma)$ l'espace des laminations plates mesurées sur Σ . On munit $\mathcal{ML}_p(\Sigma)$ de la topologie telle qu'une suite $(\Lambda_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers (Λ, μ) si et seulement si pour tout arc α transverse à Λ , α est transverse à Λ_n pour n assez grand et $\mu_{n, \alpha} \xrightarrow{*} \mu_\alpha$ dans l'espace des mesures de Radon sur $G(\alpha)$.

On dit qu'une feuille ℓ de Λ est *positivement récurrente* si on peut fixer son origine en dehors d'une singularité, de sorte que pour tout $T, \varepsilon > 0$, il existe $t > T$ tel que $d(\ell(t), \ell(0)) < \varepsilon$. Par exemple, si Σ est compacte, les feuilles qui aboutissent dans des composantes minimales sont positivement récurrentes.

Lemme 5.1.2 Si Λ est munie d'une mesure transverse μ , alors Λ n'a pas de feuille isolée qui soit positivement récurrente sans être périodique.

Démonstration. Supposons qu'il existe une feuille isolée ℓ de Λ qui soit positivement récurrente, dont on fixe l'origine telle que ci-dessus. Alors il existe un segment géodésique α de diamètre assez petit, ne rencontrant pas de singularité, transverse à Λ , qui intersecte ℓ en son origine, et une suite strictement croissante $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des instants positifs successifs où ℓ intersecte l'image de α . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\ell_n : t \mapsto \ell(t + t_n)$. Quitte à restreindre α et à changer sa direction, on définit une homotopie $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Sigma$ entre α et lui-même en le translatant parallèlement le long de chacune des liaisons de singularités parcourues par $\ell|_{[t_n, t_{n+1}]}$, et en prolongeant aux singularités pour que H soit continue, de sorte que tous les arcs $s \mapsto H(s, t)$, avec $t \in [0, 1]$, soient transverses à $\ell|_{[t_n, t_{n+1}]}$ (cette construction n'est pas unique). Puisque $[t_n, t_{n+1}]$ est compact, quitte à restreindre α , il existe un arc β tel qu'il existe un unique $z \in]0, 1[$ tel que $\beta := s \mapsto H(s, z)$ et $\beta([0, 1]) \cap H([0, 1] \times ([0, z] \cup]z, 1])) = \emptyset$. Soit t_β l'unique réel de $]t_n, t_{n+1}[$ tel que $\ell(t_\beta) \in \beta([0, 1])$. Alors il existe une holonomie entre $\{\ell_n\}$ et $\{\ell_{n, \beta}\}$, où $\ell_{n, \beta} : t \mapsto \ell(t + t_\beta)$ appartient à $G(\beta)$. De même, il existe une holonomie entre $\{\ell_{n, \beta}\}$ et $\{\ell_{n+1}\}$. D'après le point (2) de la définition 5.1.1, on en déduit que $\mu_\alpha(\{\ell_n\}) = \mu_\alpha(\{\ell_{n+1}\})$, et par récurrence, $\mu_\alpha(\{\ell_n\}) = \mu_\alpha(\{\ell_0\})$. Comme ℓ est isolée, chacune des feuilles ℓ_n est isolée dans $G(\alpha)$, et puisque ℓ_0 appartient au support de μ_α , on a $\mu_\alpha(\ell_0) > 0$. Or, l'ensemble $\{\ell_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est contenu dans $G(\alpha)$, qui est relativement compact d'après le théorème d'Ascoli. Mais, puisque ℓ n'est pas périodique, cet ensemble est infini et $\mu_\alpha(\overline{\{\ell_n\}_{n \geq 0}}) \geq \sum_{n \geq 0} \mu_\alpha(\ell_0) = +\infty$. Mais alors μ_α ne serait pas localement finie. \square

5.2 Relevé d'une lamination plate mesurée.

Soient $(\Sigma, [q])$ une surface connexe, orientable, à bord (éventuellement vide), munie d'une structure de demi-translation et (Λ, μ) une lamination plate mesurée sur Σ . Soit $p' : (\Sigma', [q']) \rightarrow (\Sigma, [q])$ un revêtement localement isométrique de $(\Sigma, [q])$ de groupe de revêtement $\Gamma_{\Sigma'}$ et Λ' l'image réciproque de Λ dans Σ' (voir la remarque précédant le lemme [Mor2, Lem. 2.3]). Puisque p' est un difféomorphisme local, si α est un arc de Σ transverse à Λ , et si α' est un relevé de α dans Σ' , alors α' est transverse à Λ' , et p' induit un homéomorphisme $f_{\alpha'} : G(\alpha') \rightarrow G(\alpha)$. On pose alors $\mu_{\alpha'} = (f_{\alpha'}^{-1})_* \mu_{\alpha}$. De même, si α' est un arc transverse à Λ' , alors son image est la réunion d'images de relevés d'arcs transverses à Λ , soit $\alpha'([0, 1]) = \alpha'_1([0, 1]) \cup \dots \cup \alpha'_n([0, 1])$ tels que, pour tout $2 \leq k \leq n$, l'intersection $\alpha'_{k-1}([0, 1]) \cap \alpha'_k([0, 1])$ est l'image d'un relevé d'un arc transverse à Λ , et pour tout $p \notin \{k, k+1, k-1\}$, l'intersection $\alpha'_k([0, 1]) \cap \alpha'_p([0, 1])$ est vide. Alors, pour tout $k \in [1, n] \cap \mathbb{N}$, on a $\mu_{\alpha'_k|G(\alpha'_k) \cap G(\alpha'_{k+1})} = (f_{\alpha'_k}^{-1})_*(\mu_{\alpha_k|G(p' \circ \alpha'_k) \cap G(p' \circ \alpha'_{k+1})}) = (f_{\alpha'_{k+1}}^{-1})_*(\mu_{\alpha_{k+1}|G(p' \circ \alpha'_k) \cap G(p' \circ \alpha'_{k+1})}) = \mu_{\alpha'_{k+1}|G(\alpha'_k) \cap G(\alpha'_{k+1})}$. Donc il existe une unique mesure $\mu_{\alpha'}$ sur $G(\alpha')$ telle que $\mu_{\alpha'|G(\alpha'_k)} = \mu_{\alpha'_k}$ pour tout $k \in [1, n] \cap \mathbb{N}$. On note $\mu' = (\mu_{\alpha'})_{\alpha' \in \tau'}$, où τ' est l'ensemble des arcs transverses à Λ' la famille de mesures ainsi définie. Par naturalité, Λ' est $\Gamma_{\Sigma'}$ -invariante et la famille μ' est invariante pour l'action par homéomorphismes de $\Gamma_{\Sigma'}$ définie par $\gamma(\mu'_{\alpha'})_{\alpha' \in \mathcal{T}'} = (\gamma_* \mu'_{\gamma^{-1}\alpha'})_{\alpha' \in \mathcal{T}'}$, pour tout $\gamma \in \Gamma_{\Sigma'}$.

Lemme 5.2.1 *La famille μ' est l'unique mesure transverse à Λ' telle que si α' est le relevé d'un arc α transverse à Λ alors $\mu_{\alpha'} = (f_{\alpha'}^{-1})_* \mu_{\alpha}$. De plus l'application de $\mathcal{ML}_p(\Sigma)$ dans $\mathcal{ML}_p(\Sigma')$ ainsi définie est un homéomorphisme entre $\mathcal{ML}_p(\Sigma)$ et l'espace des laminations plates mesurées de Σ' qui sont $\Gamma_{\Sigma'}$ -invariantes.*

Démonstration. Les propriétés (1), (3) et (4) de la définition 5.1.1 sont clairement satisfaites par μ' , et si $h' : F'_1 \subset G(\alpha'_1) \rightarrow F'_2 \subset G(\alpha'_2)$ est une holonomie de Λ' qui relève une holonomie $h : F_1 \subset G(\alpha_1) \rightarrow F_2 \subset G(\alpha_2)$ de Λ , où α_1 et α_2 , sont deux arcs disjoints et transverses à Λ , alors $\mu_{\alpha'_2|F'_2} = (f_{\alpha'_2}^{-1})_*(\mu_{\alpha_2|F_2}) = (f_{\alpha'_2}^{-1})_* h_*(\mu_{\alpha_1|F_1}) = h'_*(f_{\alpha'_1}^{-1})_*(\mu_{\alpha_1|F_1}) = h'_*(\mu_{\alpha'_1|F'_1})$. Sinon, on écrit h' comme une concaténation de compositions d'holonomies qui sont des relevés d'holonomies de Λ , et on montre de même que $\mu_{\alpha'_2|F'_2} = h'_*(\mu_{\alpha'_1|F'_1})$. Donc μ' est une mesure transverse à Λ' . L'application de $\mathcal{ML}_p(\Sigma)$ dans $\mathcal{ML}_p(\Sigma')$ ainsi définie est injective par construction. Si (Λ', μ') est une lamination plate mesurée de $(\Sigma', [q'])$ qui est $\Gamma_{\Sigma'}$ -invariante, alors l'ensemble des projetés des feuilles de Λ' sur Σ est une lamination plate Λ de $(\Sigma, [q])$ et si α est un arc transverse à Λ et α' est un relevé de α dans Σ' , alors $(f_{\alpha'})_* \mu'_{\alpha'}$ est une mesure sur $G(\alpha)$, qui ne dépend pas du choix du relevé par $\Gamma_{\Sigma'}$ -invariance. Cette mesure satisfait clairement les propriétés (1), (3) et (4) de la définition 5.1.1. De plus si $h : F_1 \rightarrow F_2$ est une holonomie entre deux boréliens de $G(\alpha_1)$ et $G(\alpha_2)$, où α_1 et α_2 sont deux arcs disjoints transverses à Λ , elle se relève en une holonomie entre deux boréliens de $G(\alpha'_1)$ et $G(\alpha'_2)$, où α'_1 et α'_2 sont des relevés de α_1 et α_2 , et on montre que $\mu_{\alpha_2|F_2} = h_*(\mu_{\alpha_1|F_1})$. Donc (Λ, μ) est bien une lamination plate mesurée, et son image par l'application précédente est (Λ', μ') . Donc cette application est une bijection entre $\mathcal{ML}_p(\Sigma)$ et l'ensemble des laminations plates mesurées de $(\Sigma', [q'])$ qui sont $\Gamma_{\Sigma'}$ -invariantes. Enfin, si $(\Lambda_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{ML}_p(\Sigma)$ qui converge vers (Λ, μ) , et si $(\Lambda'_n, \mu'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et (Λ', μ') sont leurs images dans $\mathcal{ML}_p(\Sigma')$, alors si α' est un arc transverse à Λ' qui est le relevé d'un arc α transverse à Λ , l'arc α est transverse à Λ_n pour n assez grand, et puisque p est un difféomorphisme local, α' est transverse à Λ'_n pour n assez grand. De plus, on a $\mu'_{n, \alpha'} = (f_{\alpha'}^{-1})_* \mu_{n, \alpha} \xrightarrow{*} (f_{\alpha'}^{-1})_* \mu_{\alpha} = \mu'_{\alpha}$. Si α' est un arc transverse à Λ' qui n'est pas le relevé d'un arc transverse à Λ , alors en le décomposant, on montre de même que pour n assez

grand Λ'_n est transverse à α' et $\mu'_{n,\alpha'} \xrightarrow{*} \mu'_{\alpha'}$. Donc l'application $(\Lambda, \mu) \mapsto (\Lambda', \mu')$ est continue. De même, l'application inverse est continue, donc c'est un homéomorphisme. \square

5.3 Laminations plates mesurées et mesures de Radon sur l'espace des géodésiques plates du revêtement universel.

Soient $(\Sigma, [q])$ une surface connexe, orientable, à bord (éventuellement vide), munie d'une structure de demi-translation et $p : (\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}]) \rightarrow (\Sigma, [q])$ un revêtement universel localement isométrique. Les géodésiques locales de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ sont des géodésiques, et si $\tilde{\Lambda}$ est une lamination plate de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ et si α est un arc transverse à $\tilde{\Lambda}$ tel que chacune des géodésiques de $G(\alpha)$ n'intersecte $\alpha([0, 1])$ qu'en son origine, alors l'application $g_\alpha : G(\alpha) \rightarrow [G(\alpha)]$ définie par $g_\alpha(g) = [g]$ est un homéomorphisme.

On note $\mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}([\mathcal{G}_{[\tilde{q}}])$ l'espace des mesures de Radon sur l'espace $[\mathcal{G}_{[\tilde{q}}]$ muni de la topologie des géodésiques, qui sont $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ et ι -invariantes (avec $\iota(\ell) = \ell^- : t \mapsto \ell(-t)$) et dont les supports sont des laminations plates $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ -invariantes, muni de la topologie faible-*. Soient ν un élément de $\mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}([\mathcal{G}_{[\tilde{q}}])$ dont le support est $\tilde{\Lambda}$ et α un arc transverse à $\tilde{\Lambda}$ tel que les géodésiques de $G(\alpha)$ n'intersectent $\alpha([0, 1])$ qu'en leur origine. Alors $\tilde{\mu}_\alpha = (g_\alpha^{-1})_*(\nu|_{[G(\alpha)]})$ est une mesure de Radon sur $G(\alpha)$ de support $g_\alpha^{-1}(\tilde{\Lambda} \cap [G(\alpha)])$. Si α est un arc transverse à $\tilde{\Lambda}$, mais certaines géodésiques de $G(\alpha)$ intersectent $\alpha([0, 1])$ en plusieurs points, alors on définit la mesure $\tilde{\mu}_\alpha$ par recollement fini comme dans la partie 5.2, ce qui est possible car les géodésiques de $\mathcal{G}_{[\tilde{q}]}$ sont propres. Soit $\tilde{\mu}_\nu$ la famille de mesures transverses ainsi définie.

Lemme 5.3.1 *La famille de mesures $\tilde{\mu}_\nu$ est une mesure transverse à $\tilde{\Lambda}$, et l'application $\nu \mapsto \tilde{\mu}_\nu$ ainsi définie est un homéomorphisme entre $\mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}([\mathcal{G}_{[\tilde{q}}])$ et l'ensemble des laminations plates mesurées de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ qui sont $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ -invariantes (muni de la topologie induite).*

Démonstration. Les propriétés (1), (3), et (4) de la définition 5.1.1 sont clairement satisfaites par $\tilde{\mu}_\nu$, et si $h : F_1 \rightarrow F_2$ est une holonomie de $\tilde{\Lambda}$ entre deux boréliens F_1 de $G(\alpha_1)$ et F_2 de $G(\alpha_2)$, où α_1 et α_2 sont des arcs transverses à $\tilde{\Lambda}$, alors, par définition des holonomies, les ensembles $[F_1]$ et $[F_2]$ sont égaux. Donc $\tilde{\mu}_{\nu, \alpha_2|F_2} = (g_{\alpha_2}^{-1})_* \nu|_{[F_2]} = h_*(g_{\alpha_1}^{-1})_* \nu|_{[F_1]} = h_*(\tilde{\mu}_{\nu, \alpha_1|F_1})$ et $\tilde{\mu}_\nu$ est invariante par holonomie, donc c'est une mesure transverse à $\tilde{\Lambda}$, qui est $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ -invariante par naturalité.

Sauf mention du contraire, dans la suite de la démonstration, si α est un arc transverse à une lamination plate $\tilde{\Lambda}$, on suppose que les géodésiques de $G(\alpha)$ n'intersectent $\alpha([0, 1])$ qu'en leur origine, ce à quoi on peut toujours se ramener par restriction car les géodésiques de $G(\alpha)$ sont propres et transverses à α . Supposons que deux mesures ν_1 et ν_2 de $\mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}([\mathcal{G}_{[\tilde{q}}])$ définissent la même lamination plate mesurée $(\tilde{\Lambda}, \tilde{\mu})$ par cette construction. Alors si U est un ouvert relativement compact de $[\mathcal{G}_{[\tilde{q}}]$, il existe un recouvrement ouvert fini $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ de U tel que pour chacun des U_i il existe un arc α_i transverse à $\tilde{\Lambda}$, tel que $U_i \subset [G(\alpha_i)]$. Mais alors $\nu_1(U_i) = \nu_2(U_i)$ pour tout $1 \leq i \leq n$, et $\nu_1(U) = \nu_2(U)$. Comme la tribu borélienne est engendrée par les ouverts relativement compacts, on a $\nu_1 = \nu_2$. Donc l'application $\nu \mapsto \tilde{\mu}_\nu$ est injective.

Ensuite, si $(\tilde{\Lambda}, \tilde{\mu})$ est une lamination plate mesurée, et si U est un ouvert de $[\mathcal{G}_{[\tilde{q}}]$, il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'arcs transverses à $\tilde{\Lambda}$ telle que $U \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [G(\alpha_n)]$. On pose $[F_1] = U \cap [G(\alpha_1)]$ et pour tout $n \geq 2$, $[F_n] = (U - \bigcup_{k < n} [F_k] \cap [G(\alpha_n)]) \cap [G(\alpha_n)]$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = \{g \in G(\alpha_n) : [g] \in [F_n]\}$. Alors les ensembles F_n sont des boréliens deux-à-deux disjoints. On pose $\nu(U) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}_{\alpha_n}(F_n)$. Par invariance par holonomie, cette définition ne dépend pas du

choix des α_n , et on définit ainsi une mesure borélienne sur $[\mathcal{G}_{[\tilde{q}}]$. En effet, soient $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts deux-à-deux disjoints et $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$. Il existe une suite d'arcs transverses correspondant à U et une décomposition $U = \coprod_{n \in \mathbb{N}} [F_n]$ comme ci-dessus. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $F_n = \coprod_{i \in \mathbb{N}} F_{n,i}$, où $F_{n,i} = \{g \in F_n : [g] \in U_i\}$. Alors $\nu(U) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}_{\alpha_n}(F_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}_{\alpha_n}(F_{n,i})$, et puisque tous les termes sont positifs, on a $\nu(U) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}_{\alpha_n}(F_{n,i}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \nu(U_i)$. Donc la fonction ainsi définie est σ -additive et se prolonge de manière unique en une mesure sur la tribu borélienne. D'après les propriétés (1) et (3) de la définition 5.1.1, la mesure ν est de support $\tilde{\Lambda}$ et ι -invariante, elle est $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ -invariante par naturalité, et par construction, la lamination plate mesurée associée à ν par l'application précédente est $(\tilde{\Lambda}, \tilde{\mu})$. Donc l'application $\nu \mapsto \tilde{\mu}_\nu$ est bijective.

Enfin, si $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}([\mathcal{G}_{[\tilde{q}}]])$ qui converge vers ν , et si $(\tilde{\Lambda}_n, \tilde{\mu}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{\Lambda}, \tilde{\mu})$ sont leurs images dans $\mathcal{ML}_p(\tilde{\Sigma})$, alors si α est un arc transverse à $\tilde{\Lambda}$ (tel que les géodésiques de $G(\alpha)$ n'intersectent $\alpha([0, 1])$ qu'en leur origine), pour n suffisamment grand, $\tilde{\Lambda}_n$ est transverse à α et $\tilde{\mu}_{n,\alpha} = (g_\alpha^{-1})_*(\nu_n|_{[G(\alpha)]}) \xrightarrow{*} (g_\alpha^{-1})_*(\nu|_{[G(\alpha)]}) = \tilde{\mu}_\alpha$. Donc l'application est continue. De même, si $(\tilde{\Lambda}_n, \tilde{\mu}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de laminations plates mesurées de $\tilde{\Sigma}$ qui sont $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ -invariantes, qui converge vers $(\tilde{\Lambda}, \tilde{\mu})$, et si $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et ν sont leurs images réciproques dans $\mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}([\mathcal{G}_{[\tilde{q}}]])$, alors si f est une fonction continue sur $[\mathcal{G}_{[\tilde{q}}]]$ à valeurs dans \mathbb{R} et à support compact, il existe une famille finie $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ d'arcs transverses à $\tilde{\Lambda}$ et à $\tilde{\Lambda}_n$ pour n assez grand, telle que $\text{Supp}(f) \subset \bigcup_{1 \leq i \leq p} [G(\alpha_i)]$, et pour tout $1 \leq i \leq p$ et n assez grand, on a $\nu_n(f|_{[G(\alpha_i)]}) = \tilde{\mu}_{n,\alpha_i}(f \circ g_{\alpha_i}|_{G(\alpha_i)}) \rightarrow \tilde{\mu}_{\alpha_i}(f \circ g_{\alpha_i}|_{G(\alpha_i)}) = \nu(f|_{[G(\alpha_i)]})$. Donc $\nu_n \xrightarrow{*} \nu$ et la réciproque est continue. Donc l'application $\nu \mapsto \tilde{\mu}_\nu$ est un homéomorphisme. \square

Corollaire 5.3.2 *L'espace $\mathcal{ML}_p(\Sigma)$ est homéomorphe à $\mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}([\mathcal{G}_{[\tilde{q}}]])$.* \square

5.4 Liens entre laminations plates mesurées et laminations hyperboliques mesurées.

Dans cette partie 5.4, on note toujours $(\Sigma, [q])$ une surface connexe, orientable, à bord (éventuellement vide) munie d'une structure de demi-translation, $p : (\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}]) \rightarrow (\Sigma, [q])$ un revêtement universel localement isométrique de groupe de revêtement $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$. On suppose que Σ est compacte et $\chi(\Sigma) < 0$, et on note m une métrique hyperbolique sur Σ et \tilde{m} l'unique métrique hyperbolique sur $\tilde{\Sigma}$ telle que $p : (\tilde{\Sigma}, \tilde{m}) \rightarrow (\Sigma, m)$ soit localement isométrique. Pour toute géodésique g de $[\mathcal{G}_{[\tilde{q}}]]$ ou $[\mathcal{G}_{\tilde{m}}]$, on note $E(g) \in \partial_\infty^2 \tilde{\Sigma}$ le couple de ses points à l'infini, et si F est un ensemble de géodésiques, $E(F) = \{E(g) : g \in F\}$. L'espace $\mathcal{ML}_h(\Sigma)$ des laminations hyperboliques mesurées sur (Σ, m) , muni de la topologie définie dans [Bon2, p. 19], est homéomorphe à l'espace des mesures de Radon $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ et ι -invariantes, dont le support est une lamination hyperbolique sur $[\mathcal{G}_{\tilde{m}}]$, que l'on note $\mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}([\mathcal{G}_{\tilde{m}}])$ (voir [Bon3, Prop. 17 p. 154]). Dans cette partie 5.4, on utilise ce fait et l'homéomorphisme entre $\mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}([\mathcal{G}_{[\tilde{q}}]])$ et $\mathcal{ML}_p(\Sigma)$ défini au corollaire 5.3.2 pour étudier le lien entre $\mathcal{ML}_p(\Sigma)$ et $\mathcal{ML}_h(\Sigma)$. On note $\varphi : [\mathcal{G}_{[\tilde{q}}]] \rightarrow [\mathcal{G}_{\tilde{m}}]$ l'application qui à une géodésique $\tilde{\ell} \in [\mathcal{G}_{[\tilde{q}}]]$ associe la géodésique $\varphi(\tilde{\ell}) \in [\mathcal{G}_{\tilde{m}}]$ qui lui correspond, c'est-à-dire telle que $E(\varphi(\tilde{\ell})) = E(\tilde{\ell})$ (voir [Mor2, §4.2]). Alors φ est surjective et continue, et une partie fermée F de $[\mathcal{G}_{[\tilde{q}}]]$ est une lamination plate si et seulement si $\varphi(F)$ est une lamination hyperbolique. De plus φ est propre. En effet, si K est un compact de $[\mathcal{G}_{\tilde{m}}]$, et si $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\varphi^{-1}(K)$, alors par définition de φ , quitte à extraire, la suite $(E(\ell_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\partial_\infty^2 \tilde{\Sigma}$. Puisque $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ est δ -hyperbolique (car Σ est compacte et $\chi(\Sigma) < 0$, voir [Mor2, Rem. 2.10]), d'après [Mor2, Lem. 2.6], quitte à extraire, la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une

géodésique $\tilde{\ell}$ telle que $E(\tilde{\ell}) \in E(K)$. Donc $\tilde{\ell}$ appartient à $\varphi^{-1}(K)$ qui est donc compact.

En revanche, l'application φ n'est pas injective. Par définition, deux géodésiques distinctes $\tilde{\ell}, \tilde{\ell}'$ de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ ont la même image par φ si et seulement si elles ont le même couple de points à l'infini, et d'après le théorème de la bande plate (voir par exemple [BH, Th. 2.13 P. 182]), leurs images sont parallèles et contenues dans une même bande plate maximale de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$. Leurs projetés dans $(\Sigma, [q])$ sont alors des géodésiques locales périodiques, librement homotopes et contenues dans un cylindre plat maximal (voir par exemple [MS1, Th. 2.(c)]). Les points à l'infini de $\tilde{\ell}, \tilde{\ell}'$ et de leur image $\varphi(\tilde{\ell}) = \varphi(\tilde{\ell}')$ sont alors les points fixes attractif et répulsif d'un élément du groupe de revêtement, et le projeté de $\varphi(\tilde{\ell})$ est une géodésique locale fermée de (Σ, m) . Donc la restriction de φ à l'ensemble des géodésiques de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ dont les projetés ne sont pas périodiques est une application injective d'image l'ensemble des géodésiques de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$ dont les projetés ne sont pas des géodésiques fermées, et l'image réciproque d'une géodésique $\tilde{\lambda}$ de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$ dont le projeté est une géodésique fermée est l'ensemble des géodésiques de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ ayant le même couple de points à l'infini que $\tilde{\lambda}$, qui est soit réduit à une unique géodésique, soit est un ensemble de géodésiques parallèles contenues dans une même bande plate.

Lemme 5.4.1 *L'application φ définit une application continue, surjective et propre φ_* entre les espaces de mesures de Radon sur $[\mathcal{G}_{[\tilde{q}}]$ et $[\mathcal{G}_{\tilde{m}}]$. De plus, $\varphi_*\nu$ appartient à $\mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}([\mathcal{G}_{\tilde{m}}])$ si et seulement si ν appartient à $\mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}([\mathcal{G}_{[\tilde{q}}])$ et la restriction de φ_* à $\mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}([\mathcal{G}_{[\tilde{q}}])$ est une surjection $\varphi_* : \mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}([\mathcal{G}_{[\tilde{q}}]) \rightarrow \mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}([\mathcal{G}_{\tilde{m}}])$.*

Démonstration. L'application φ est continue et propre donc elle définit une application continue φ_* entre les espaces des mesures de Radon sur $[\mathcal{G}_{[\tilde{q}}]$ et $[\mathcal{G}_{\tilde{m}}]$. Montrons que φ_* est surjective. L'application $s : [\mathcal{G}_{\tilde{m}}] \rightarrow [\mathcal{G}_{[\tilde{q}}]$ qui à une géodésique hyperbolique associe la géodésique plate à laquelle elle correspond (si elle est unique) et la géodésique "milieu" de l'ensemble des géodésiques (contenues dans une même bande plate) auxquelles elle correspond sinon, est une section mesurable (mais non continue) de φ . Puisque φ est continue, l'image réciproque d'un compact par l'application s est relativement compacte, donc s définit une application s_* de l'ensemble des mesures de Radon sur $[\mathcal{G}_{\tilde{m}}]$ dans l'ensemble des mesures de Radon sur $[\mathcal{G}_{[\tilde{q}}]$, et $\varphi_* \circ s_* = \text{Id}$. Donc φ_* est surjective.

Montrons que φ_* est propre. L'espace $[\mathcal{G}_{\tilde{m}}]$ muni de la topologie des géodésiques est localement compact et σ -compact, donc il est dénombrable à l'infini. Puisque φ est continue et propre, $[\mathcal{G}_{[\tilde{q}}]$ est aussi dénombrable à l'infini. Donc il existe une suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de compacts telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n soit contenu dans l'intérieur de K_{n+1} et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = [\mathcal{G}_{[\tilde{q}}]$. Si C est un compact de l'espace des mesures de Radon sur $[\mathcal{G}_{\tilde{m}}]$ et si K est un compact de $[\mathcal{G}_{[\tilde{q}}]$, alors l'ensemble $\{\nu(K), \nu \in (\varphi_*)^{-1}(C)\}$ est borné par le maximum de $\{\nu(\varphi(K)), \nu \in C\}$, qui est fini car C est compact. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{\nu_{|K_n}, \nu \in (\varphi_*)^{-1}(C)\}$ est compact. Donc si $(\nu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de $(\varphi_*)^{-1}(C)$, par un procédé d'extraction diagonale, il existe une sous-suite toujours notée $(\nu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et une mesure de Radon ν sur $[\mathcal{G}_{[\tilde{q}}]$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\nu_{k|K_n} \xrightarrow{*} \nu_{|K_n}$. Or, d'après le choix de la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pour tout $f \in \mathcal{C}_c([\mathcal{G}_{[\tilde{q}}])$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Supp}(f) \subset K_n$, et alors $(\nu_k(f))_{k \in \mathbb{N}} = (\nu_{k|K_n}(f))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\nu_{|K_n}(f) = \nu(f)$. Donc on a bien $\nu_k \xrightarrow{*} \nu$ et φ_* est propre sur l'espace des mesures de Radon.

Enfin, par définition de φ , la mesure $\varphi_*\nu$ appartient à $\mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}([\mathcal{G}_{\tilde{m}}])$ si et seulement si ν appartient à $\mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}([\mathcal{G}_{[\tilde{q}}])$. De plus, l'espace $\mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}([\mathcal{G}_{\tilde{m}}])$ est fermé (voir [Bon3, Prop. 3 et 17]), et puisque φ_* est continue, son image réciproque est fermée. Donc la restriction de φ_* à ces espaces définit une surjection continue et propre. \square

L'application φ_* n'est pas injective. D'après le défaut d'injectivité de φ , l'image réciproque d'une mesure de Radon sur $[\mathcal{G}_{\tilde{m}}]$ dont le support ne contient aucune géodésique dont le projeté dans (Σ, m) est une géodésique fermée, est une unique mesure de Radon sur $[\mathcal{G}_{[\tilde{q}]}]$ dont le support ne contient aucune géodésique dont le projeté dans $(\Sigma, [q])$ est une géodésique locale périodique. En revanche, l'image réciproque par φ_* d'une masse de Dirac ν de masse $\delta > 0$, dont le support est une géodésique $\tilde{\lambda}$ dont le projeté dans (Σ, m) est une géodésique fermée, est l'ensemble des mesures de Radon sur $[\mathcal{G}_{[\tilde{q}]}]$ de masse totale δ , dont le support est un sous-ensemble F fermé de l'ensemble des géodésiques de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ ayant le même couple de points à l'infini que $\tilde{\lambda}$. S'il existe au moins deux telles géodésiques, alors cet ensemble est l'ensemble des géodésiques parallèles contenues dans une même bande plate, de largeur $L > 0$, et il est homéomorphe à $[0, L]$. L'ensemble F est donc homéomorphe à un sous-ensemble fermé de $[0, L]$. Donc l'image réciproque de ν par φ_* est homéomorphe à l'ensemble des mesures boréliennes sur $[0, L]$ de masse totale δ .

Les espaces $\mathcal{ML}_h(\Sigma)$ et $\mathcal{ML}_p(\Sigma)$ sont respectivement homéomorphes à $\mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}([\mathcal{G}_{\tilde{m}}])$ et à $\mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}([\mathcal{G}_{[\tilde{q}]}])$, donc φ_* définit une application continue, surjective et propre $\psi : \mathcal{ML}_p(\Sigma) \rightarrow \mathcal{ML}_h(\Sigma)$. Or, \mathbb{R}^{+*} agit par multiplications des mesures sur chacun des deux espaces. On note $\mathcal{PML}_p(\Sigma)$ et $\mathcal{PML}_h(\Sigma)$ les espaces quotients pour ces actions. Alors ψ passe au quotient et définit une application continue, surjective et propre $\bar{\psi} : \mathcal{PML}_p(\Sigma) \rightarrow \mathcal{PML}_h(\Sigma)$. On en déduit les lemmes suivants.

Lemme 5.4.2 *L'espace $\mathcal{PML}_p(\Sigma)$ est compact.*

Démonstration. L'espace $\mathcal{PML}_h(\Sigma)$ est compact (voir [Bon3, Cor. 5 et Prop. 17]) et $\bar{\psi}$ est propre. \square

Si Σ est compacte, on appelle *lamination cylindrique mesurée* une lamination plate mesurée qui a une unique composante qui est cylindrique (voir [Mor2, §6]).

Lemme 5.4.3 *Comme Σ est compacte, les laminations cylindriques mesurées ayant un nombre fini de feuilles sont denses dans $\mathcal{ML}_p(\Sigma)$. En particulier, $\mathcal{ML}_p(\Sigma)$ est séparable.*

Démonstration. L'ensemble des géodésiques simples munies de mesures transverses, qui sont des masses de Dirac strictement positives, est dense dans $\mathcal{ML}_h(\Sigma)$ (voir [Bon2, Prop. 15]), et son image réciproque par φ_* est l'ensemble des laminations cylindriques mesurées. Puisque φ_* est continue, cet ensemble est dense dans $\mathcal{ML}_p(\Sigma)$. Si (Λ, μ) est une lamination cylindrique mesurée dont le support n'est pas réduit à une feuille, on note $\alpha : [0, T] \rightarrow C$ ($T > 0$) un arc géodésique qui relie orthogonalement les bords du cylindre plat maximal C qui contient le support de Λ . Alors l'ensemble des géodésiques locales contenues dans C et parallèles aux bords de C est homéomorphe à $[0, T]$, et puisque l'ensemble des mesures de Radon de support fini sur $[0, T]$ est dense dans l'espace des mesures de Radon sur $[0, T]$, il existe une suite $(\mu_{n,\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ de mesures de Radon de support fini sur $G(\alpha)$ telle que pour tout n , chacune des feuilles du support de $\mu_{n,\alpha}$ est parallèle aux bords de C et $\mu_{n,\alpha} \xrightarrow{*} \mu_\alpha$. De plus, $\Lambda_n = [\text{Supp}(\mu_{n,\alpha})]$ est une lamination plate et $\mu_{n,\alpha}$ définit une mesure transverse à Λ_n , telle que la suite $(\Lambda_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers (Λ, μ) . \square

Les applications ψ et $\bar{\psi}$ ne sont pas injectives. Supposons que Σ soit compacte de genre $g \in \mathbb{N}$ avec $b \in \mathbb{N}$ composantes de bord. D'après le défaut d'injectivité de φ_* , l'image réciproque d'une lamination hyperbolique mesurée dont aucune feuille n'est fermée est une unique lamination plate mesurée dont aucune feuille n'est périodique. En revanche, si (Λ_m, μ_m) est une feuille fermée λ

munie d'une mesure transverse qui est une masse de Dirac de poid $\delta > 0$, l'image réciproque par ψ de (Λ_m, μ_m) est l'ensemble des laminations cylindriques mesurées dont le support est un ensemble fermé F de feuilles librement homotopes à λ . Si l'ensemble des géodésiques locales de $(\Sigma, [q])$ librement homotopes à λ contient au moins deux éléments, il feuillette un cylindre plat maximal. Cet ensemble est alors homéomorphe à $[0, L]$, où L est la hauteur du cylindre plat, et F est homéomorphe à un sous-ensemble fermé de $[0, L]$. Donc l'image réciproque de (Λ_m, μ_m) par ψ est homéomorphe à l'ensemble des mesures borélienne sur $[0, L]$ de masse totale δ . Puisque φ_* est équivariante pour l'addition des mesures, on en déduit que si une lamination hyperbolique mesurée contient des feuilles fermées $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, de poids respectifs $\delta_1, \dots, \delta_p$ (on a toujours $p \leq 3g - 3 + b$), alors l'image réciproque de (Λ_m, μ_m) par ψ est homéomorphe au produit cartésien des ensembles de mesures boréliennes sur $[0, L_i]$, $1 \leq i \leq p$, où L_i est la hauteur du cylindre plat maximal réunion des géodésiques locales de $(\Sigma, [q])$ librement homotopes à λ_i , de masse totale δ_i .

Puisque Σ est compacte, le projectifié $\mathcal{PML}_h(\Sigma)$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^{6g-6+2b}$ (voir [Bon2, Th. 17]). Si le support des laminations hyperboliques mesurées dans la classe de $x \in \mathcal{PML}_h(\Sigma)$ ne contient pas de feuille fermée, l'image réciproque de $\{x\}$ par $\bar{\psi}$ est un point. En revanche, si les feuilles fermées $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ appartiennent au support des laminations hyperboliques mesurées dans la classe de x , et si L_1, \dots, L_p sont les hauteurs des cylindres plats maximaux réunions des images des géodésiques locales de $(\Sigma, [q])$ librement homotopes à $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ($L_i = 0$ s'il n'y a qu'une seule géodésique locale librement homotope à λ_i), alors l'image réciproque de $\{x\}$ par $\bar{\psi}$ est homéomorphe au produit cartésien des ensembles S_i , $1 \leq i \leq p$, de mesures boréliennes sur $[0, L_i]$ de masses totales inférieures ou égales à 1. En particulier, l'ensemble des points dont l'image réciproque par $\bar{\psi}$ n'est pas un point est dense dans $\mathcal{PML}_h(\Sigma)$.

5.4.1 Nombre d'intersection.

Dans cette partie 5.4.1, on note $(\Sigma, [q])$ une surface compacte, connexe, orientable, à bord (éventuellement vide), munie d'une structure de demi-translation, telle que $\chi(\Sigma) < 0$.

On note $\mathcal{C}(\tilde{\Sigma})$ l'espace des courants géodésiques sur $\tilde{\Sigma}$, muni de la topologie faible-* (voir [Bon3, §1]). Alors l'ensemble des classes d'homotopie libre de courbes fermées sur Σ munies de masses strictement positives se plonge dans $\mathcal{C}(\tilde{\Sigma})$, et le nombre d'intersection géométrique sur cet ensemble se prolonge de manière unique en une application continue $i : \mathcal{C}(\tilde{\Sigma}) \times \mathcal{C}(\tilde{\Sigma}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ (voir [Bon3, Prop. 3]). D'après le lemme 5.4.1, φ_* définit une application $\varphi_* : \mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}([\mathcal{G}_{[q]}]) \rightarrow \mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}([\mathcal{G}_{\tilde{m}}])$ de l'espace des mesures de Radon $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ -invariantes, dont le support est une lamination plate de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ dans l'espace des mesures de Radon $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ -invariantes, dont le support est une lamination hyperbolique de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$. Puisque $\mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}([\mathcal{G}_{\tilde{m}}])$ est homéomorphe au sous-ensemble fermé des courants géodésiques ν tels que $i(\nu, \nu) = 0$ (voir [Bon3, Prop. 17]), φ_* définit une application de $\mathcal{ML}_p(\Sigma)$ dans l'ensemble $\{\nu \in \mathcal{C}(\tilde{\Sigma}) : i(\nu, \nu) = 0\}$. Soient α une classe d'homotopie libre de courbes fermées, non triviale, $(\Lambda_{[q]}, \mu_{[q]})$ une lamination plate mesurée et $\nu_{\mu_{[q]}} \in \mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}([\mathcal{G}_{[q]}])$ la mesure définie par $(\Lambda_{[q]}, \mu_{[q]})$ (voir le corollaire 5.3.2). On définit le nombre d'intersection géométrique de $(\Lambda_{[q]}, \mu_{[q]})$ et α par

$$i_{[q]}(\mu_{[q]}, \alpha) = i(\varphi_* \nu_{\mu_{[q]}}, \alpha)$$

Si α_0 est une classe d'homotopie libre de courbes fermées telle que $\alpha = \alpha_0^k$, avec $k \in \mathbb{N}$, on a $i_{[q]}(\mu_{[q]}, \alpha) = k i_{[q]}(\mu_{[q]}, \alpha_0)$. On suppose donc que α est primitive (i.e. s'il existe une classe d'homotopie libre α_0 telle que $\alpha = \alpha_0^k$, alors $k = \pm 1$), on note $\alpha_{[q]}$ une géodésique locale plate dans la classe

de α , $\tilde{\alpha}_{[q]}$ un relevé de $\alpha_{[q]}$ dans $\tilde{\Sigma}$ et $\gamma \in \Gamma_{\tilde{\Sigma}} - \{e\}$ l'élément hyperbolique primitif de $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ dont $\tilde{\alpha}_{[q]}$ est un axe de translation. Soit $(\tilde{\Lambda}_{[q]}, \tilde{\mu}_{[q]})$ la préimage de $(\Lambda_{[q]}, \mu_{[q]})$ dans $\tilde{\Sigma}$.

Lemme 5.4.4 *Le nombre $i_{[q]}(\mu_{[q]}, \alpha)$ est égal à la moitié de la masse, pour $\nu_{\mu_{[q]}}$, de l'ensemble des feuilles de $\tilde{\Lambda}_{[q]}$ entrelacées avec $\tilde{\alpha}_{[q]}$, qui l'intersectent en (au moins) un point d'un intervalle de $\tilde{\alpha}_{[q]}(\mathbb{R})$ qui est un domaine fondamental pour l'action par translations de $\gamma^{\mathbb{Z}}$.*

Démonstration. Le nombre $i(\varphi_*\nu_{\mu_{[q]}}, \alpha)$ est égal à $\frac{1}{2}\varphi_*\nu_{\mu_{[q]}}(F_m)$, où F_m est l'ensemble des feuilles de la lamination hyperbolique mesurée $(\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}, \tilde{\mu}_m)$ définie par $\varphi_*\nu_{\mu_{[q]}}$ qui intersectent transversalement un intervalle $I = [a, \gamma a[$, avec $a \in \tilde{\alpha}_m(\mathbb{R})$, de l'axe de translation $\tilde{\alpha}_m(\mathbb{R})$ de γ dans $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$, qui est un domaine fondamental de $\tilde{\alpha}_m(\mathbb{R})$ pour l'action par translations de $\gamma^{\mathbb{Z}}$ (voir [Bon3, Prop. 3]). Puisque a est arbitraire, si F_m n'est pas vide, on peut supposer que a est le point d'intersection d'une feuille $\tilde{\lambda}$ de $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ et de $\tilde{\alpha}_m(\mathbb{R})$. Alors F_m est l'ensemble des feuilles de $\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}$ qui intersectent transversalement $\tilde{\alpha}_m(\mathbb{R})$ et qui sont contenues dans l'intersection de l'adhérence de la composante connexe de $\tilde{\Sigma} - \tilde{\lambda}(\mathbb{R})$ contenant $\gamma\tilde{\lambda}(\mathbb{R})$ et de l'adhérence de la composante connexe de $\tilde{\Sigma} - \gamma\tilde{\lambda}(\mathbb{R})$ contenant $\tilde{\lambda}(\mathbb{R})$, privée de $\gamma\tilde{\lambda}$. Mais $\varphi_*\nu_{\mu_{[q]}}(F_m) = \nu_{\mu_{[q]}}(\varphi^{-1}F_m)$. Par définition de φ , l'ensemble $\varphi^{-1}(F_m)$ est l'ensemble des feuilles de $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$ entrelacées avec $\tilde{\alpha}_{[\tilde{q}]}$, qui sont contenues dans l'intersection de l'adhérence de la composante connexe de $\tilde{\Sigma} - \tilde{\ell}(\mathbb{R})$ contenant $\gamma\tilde{\ell}(\mathbb{R})$ et de l'adhérence de la composante connexe de $\tilde{\Sigma} - \gamma\tilde{\ell}(\mathbb{R})$ contenant $\tilde{\ell}(\mathbb{R})$, privé de $\gamma\tilde{\ell}$, où $\tilde{\ell}$ est une feuille de $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$ appartenant à $\varphi^{-1}(\lambda)$ (puisque $\nu_{\mu_{[q]}}$ est γ -invariante, si plusieurs feuilles appartiennent à $\varphi^{-1}(\lambda)$, on peut choisir $\tilde{\ell}$ arbitrairement dans cet ensemble). Alors l'ensemble $\varphi^{-1}(F_m)$ est l'ensemble des feuilles entrelacées avec $\tilde{\alpha}_{[\tilde{q}]}$ qui l'intersectent en au moins un point de $[b, \gamma b[$ où b est un point d'intersection de $\tilde{\ell}$ et $\tilde{\alpha}_{[\tilde{q}]}$. L'intervalle $[b, \gamma b[$ est un domaine fondamental de $\tilde{\alpha}_{[\tilde{q}]}(\mathbb{R})$ pour l'action par translations de $\gamma^{\mathbb{Z}}$, et puisque les choix de $\tilde{\lambda}$ et de $\tilde{\ell} \in \varphi^{-1}(\lambda)$ sont arbitraires, on montre que n'importe quelle feuille $\tilde{\ell}$ convient, et par γ -invariance de $\nu_{\mu_{[q]}}$, on montre que l'on peut choisir b arbitrairement dans $\tilde{\alpha}_{[\tilde{q}]}(\mathbb{R})$. Enfin, si F_m est vide, aucune feuille de $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$ n'est entrelacée avec $\tilde{\alpha}_{[\tilde{q}]}$ et $i(\varphi_*\nu_{\mu_{[q]}}, \alpha) = 0$. \square

Remarque. On pourrait définir le nombre d'intersection géométrique d'une classe d'homotopie libre de courbes fermées avec $(\Lambda_{[q]}, \mu_{[q]})$ comme la borne inférieure des masses déposées par la lamination plate mesurée sur les courbes fermées, transverses à $\Lambda_{[q]}$ par morceaux, dans la classe d'homotopie libre, comme pour les feuilletages mesurés, mais alors elle ne serait pas toujours atteinte car une géodésique locale périodique n'est généralement pas transverse par morceaux à la lamination. À moins de définir la masse déposée par la lamination mesurée sur un segment parcouru par morceaux par des feuilles, mais cette définition est lourde et il faudrait distinguer beaucoup de cas.

Par ailleurs, pour les surfaces munies de structures de demi-translation compactes et sans bord, à la différence des laminations hyperboliques mesurées (voir [Ota, Th. 2]), le nombre d'intersection avec les classes d'homotopies libres de courbes fermées de Σ ne sépare pas les laminations plates mesurées, mais seulement leur image dans $\mathcal{ML}_h(\Sigma)$. En particulier, la topologie définie après la définition 5.1.1 n'est pas équivalente à celle induite par la topologie produit sur $\mathbb{R}^{\mathcal{H}}$, où \mathcal{H} est l'ensemble des classes d'homotopie libre de courbes fermées, sur l'image de $\mathcal{ML}_p(\Sigma)$ par l'application $(\Lambda_{[q]}, \mu_{[q]}) \mapsto (i(\mu_{[q]}, \alpha))_{\alpha \in \mathcal{H}}$.

5.5 Arbre dual à une lamination plate mesurée.

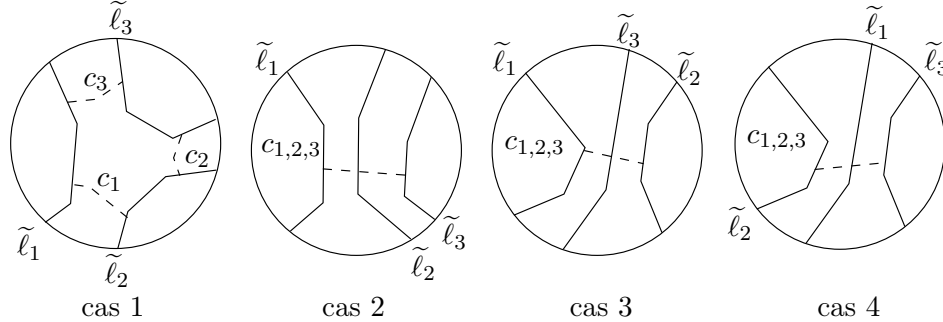
Dans cette partie 5.5, on note toujours $(\Sigma, [q])$ une surface munie d'une structure plate comme dans la partie 5.1, et l'on suppose que Σ est compact et $\chi(\Sigma) < 0$, $p : (\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}]) \rightarrow (\Sigma, [q])$ un revêtement universel localement isométrique et (Λ, μ) une lamination plate mesurée de $(\Sigma, [q])$. On note $(\tilde{\Lambda}, \tilde{\mu})$ son image réciproque dans $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ et $\nu_{\tilde{\mu}}$ la mesure de Radon sur $\mathcal{G}_{[\tilde{q}]}$ qui lui est associée (voir le lemme 5.3.1). On suppose tout d'abord que $\nu_{\tilde{\mu}}$ n'a pas d'atome.

Si $\tilde{\ell}$ est une feuille de $\tilde{\Lambda}$, alors son complémentaire dans $\tilde{\Sigma}$ a deux composantes connexes et chaque feuille de $\tilde{\Lambda}$, étant non entrelacée avec $\tilde{\ell}$, est contenue dans l'une ou l'autre des adhérences des composantes connexes de $\tilde{\Sigma} - \tilde{\ell}(\mathbb{R})$. On dit qu'une feuille $\tilde{\ell}$ *sépare* deux autres feuilles si celles-ci ne sont pas contenues dans l'adhérence de la même composante connexe du complémentaire de $\tilde{\ell}(\mathbb{R})$ dans $\tilde{\Sigma}$. Soient $\tilde{\ell}_0$ et $\tilde{\ell}_1$ deux feuilles de $\tilde{\Lambda}$, et c un segment géodésique qui relie leur image (si les images ne sont pas disjointes c peut être réduit à un point). On note C_i l'adhérence de la composante connexe de $\tilde{\Sigma} - \tilde{\ell}_i(\mathbb{R})$ qui contient $\tilde{\ell}_{i+1}(\mathbb{R})$ (avec $i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). On dit qu'une feuille de $\tilde{\Lambda}$ *intersecte non trivialement* c si elle intersecte les deux composantes connexes du complémentaire de l'image de c dans $C_0 \cap C_1$, et on note $B(\tilde{\ell}_0, \tilde{\ell}_1) = B_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{\ell}_0, \tilde{\ell}_1)$ l'ensemble des feuilles de $\tilde{\Lambda}$ qui sont contenues dans $C_0 \cap C_1$ et intersectent non trivialement c .

Lemme 5.5.1 *L'ensemble compact $B(\tilde{\ell}_0, \tilde{\ell}_1)$ ne dépend pas du choix de c .*

Démonstration. L'ensemble des feuilles contenues dans $C_0 \cap C_1$ est compact et la condition d'intersecter non trivialement c est fermée sur cet ensemble, donc $B(\tilde{\ell}_0, \tilde{\ell}_1)$ est compact. Soit c' un autre segment géodésique qui relie les images de $\tilde{\ell}_0$ et $\tilde{\ell}_1$. Comme c et c' séparent $C_0 \cap C_1$ en deux composantes connexes et puisque l'intersection de deux segments géodésiques de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ (ou d'une géodésique et d'un point) est connexe, chacune des géodésiques qui intersecte non trivialement c intersecte non trivialement c' et réciproquement. \square

Si $\{\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2\}$ est une paire de feuilles de $\tilde{\Lambda}$, on pose $\tilde{d}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2) = \nu_{\tilde{\mu}}(B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2))$. Alors $\tilde{d}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2) \geq 0$ et $\tilde{d}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2) = \tilde{d}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{\ell}_2, \tilde{\ell}_1)$. De plus, si $\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2$ et $\tilde{\ell}_3$ sont trois feuilles de $\tilde{\Lambda}$ et c_1, c_2 et c_3 sont des segments géodésiques reliant respectivement les images de $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$, $\tilde{\ell}_2$ et $\tilde{\ell}_3$, et $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_3$ (noté $c_{1,2,3}$ sur la figure, cas 2, 3 et 4), alors ou bien aucune des trois feuilles ne sépare les deux autres (cas 1) ou bien l'une sépare les deux autres (cas 2, 3 et 4). Dans le cas 1, chacune des feuilles de $B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_3)$ intersecte non trivialement c_1 ou c_2 , donc $B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_3) \subseteq B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2) \cup B(\tilde{\ell}_2, \tilde{\ell}_3)$, dans le cas 2 on a $B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_3) = B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2) \cup B(\tilde{\ell}_2, \tilde{\ell}_3)$, dans le cas 3 on a $B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_3) \subseteq B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2)$ et dans le cas 4, on a $B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_3) \subseteq B(\tilde{\ell}_2, \tilde{\ell}_3)$. Dans tous les cas, on a $\tilde{d}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_3) \leq \tilde{d}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2) + \tilde{d}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{\ell}_2, \tilde{\ell}_3)$. Donc $\tilde{d}_{\tilde{\Lambda}}$ est une pseudo-distance sur $\tilde{\Lambda}$.



On note (T, d_T) l'espace métrique quotient $(\tilde{\Lambda}, \tilde{d}_{\tilde{\Lambda}})/\sim$ pour la relation d'équivalence $\tilde{\ell} \sim \tilde{\ell}'$ si et seulement si $\tilde{d}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}') = 0$, et si F est un ensemble de feuilles de $\tilde{\Lambda}$, on note F^T son image par l'application de passage au quotient.

Remarque 5.5.2 Soient $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ deux feuilles distinctes de $\tilde{\Lambda}$. Comme pour les images réciproques des laminations hyperboliques mesurées sur une surface compacte, si $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ ne bordent pas une même bande plate et sont telles que $\tilde{\ell}_1(+\infty) = \tilde{\ell}_2(+\infty)$, alors il n'existe pas d'autre feuille $\tilde{\ell}$ de $\tilde{\Lambda}$ telle que $\tilde{\ell}(+\infty) = \tilde{\ell}_1(+\infty)$. On a alors $B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2) = \{\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2\}$.

De plus, comme $\nu_{\tilde{\mu}}$ est de support $\tilde{\Lambda}$ et sans atome, si $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ bordent une même bande plate d'intérieur non vide ou ont leurs points à l'infini qui sont deux-à-deux distincts, alors $B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2)$ est ou bien réduit à $\{\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2\}$, ou bien d'intérieur non vide. En effet, si $\tilde{\ell}$ est une feuille de $B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2) - \{\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2\}$, alors il existe un voisinage ouvert U de $\tilde{\ell}$ dans $\tilde{\Lambda}$, non réduit à $\tilde{\ell}$, et par hypothèse, quitte à restreindre, U est contenu dans l'intérieur de $B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2)$.

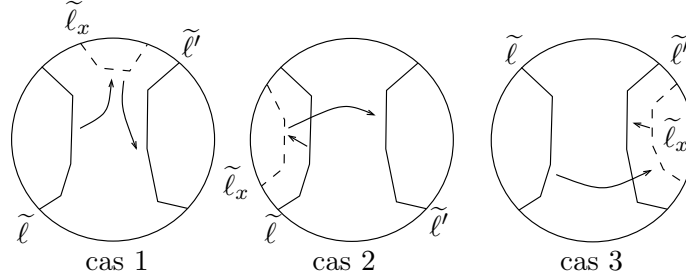
Donc, dans tous les cas, ou bien $B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2) = \{\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2\}$, ou bien $B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2)$ est d'intérieur non vide (dans $\tilde{\Lambda}$). Puisque $\nu_{\tilde{\mu}}$ n'a pas d'atome et son support est $\tilde{\Lambda}$, on en conclut que $\nu_{\tilde{\mu}}(B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2)) = 0$ si et seulement si $B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2) = \{\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2\}$, et que la topologie définie par la distance d_T est équivalente à la topologie quotient de la topologie des géodésiques sur $\tilde{\Lambda}$, pour la relation $\tilde{\ell}_1 R \tilde{\ell}_2$ si et seulement si $B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2) = \{\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2\}$.

Enfin, puisque le complémentaire de chacune des feuilles a deux composantes connexes et chacune des autres feuilles est contenue dans l'adhérence de l'une des deux, la relation définie sur $B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2)$ par $\tilde{\ell} \preceq \tilde{\ell}'$ si et seulement si $\tilde{\ell}$ appartient à $B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}')$ est une relation d'ordre total qui passe au quotient et définit une relation d'ordre total sur $B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2)^T$.

Lemme 5.5.3 *L'espace métrique (T, d_T) est un arbre réel.*

Démonstration. Soient $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ deux feuilles de $\tilde{\Lambda}$. L'application $f : B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(\tilde{\ell}) = \tilde{d}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell})$ est croissante (pour \preceq) et continue car $\nu_{\tilde{\mu}}$ n'a pas d'atome. De plus elle passe au quotient et définit une application continue et strictement croissante $\bar{f} : B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2)^T \rightarrow \mathbb{R}^+$. Comme $B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2)^T$ est compact, c'est un homéomorphisme sur son image. Supposons que son image ne soit pas un intervalle. Puisque c'est un sous-ensemble compact de \mathbb{R} , si U est une composante connexe bornée du complémentaire de $f(B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2))$ dans \mathbb{R}^+ , alors son adhérence est un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$. Soient $\tilde{\ell}_a$ et $\tilde{\ell}_b$ des feuilles de $f^{-1}(a)$ et $f^{-1}(b)$. Si $B(\tilde{\ell}_a, \tilde{\ell}_b) - \{\tilde{\ell}_a, \tilde{\ell}_b\}$ n'est pas vide, alors on a vu que $B(\tilde{\ell}_a, \tilde{\ell}_b)$ est d'intérieur non vide. Mais si $\tilde{\ell}$ appartient à l'intérieur de $B(\tilde{\ell}_a, \tilde{\ell}_b)$, les ensembles $B(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell})$ et $B(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}_2)$ sont d'intérieur non vide, et $a < \bar{f}(\tilde{\ell}^T) < b$. Donc $B(\tilde{\ell}_a, \tilde{\ell}_b) = \{\tilde{\ell}_a, \tilde{\ell}_b\}$, ce qui est impossible car alors $\tilde{d}(\tilde{\ell}_a, \tilde{\ell}_b) = 0$ et on aurait $a = b$. Donc l'image de \bar{f} est l'intervalle $[0, d_T(\tilde{\ell}^T, \tilde{\ell}'^T)]$, et $\bar{f}^{-1} : [0, d_T(\tilde{\ell}^T, \tilde{\ell}'^T)] \rightarrow T$ est un segment entre $\tilde{\ell}^T$ et $\tilde{\ell}'^T$. Montrons que c'est le seul arc entre $\tilde{\ell}^T$ et $\tilde{\ell}'^T$, à reparamétrage près. Soit $g : [0, 1] \rightarrow T$ un autre arc joignant $\tilde{\ell}^T$ et $\tilde{\ell}'^T$. Si une feuille $\tilde{\ell}_0$ appartient à $B(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}')$ alors elle sépare $\tilde{\ell}$ et $\tilde{\ell}'$ (au sens de la définition ci-dessus) et puisque g est continue pour la topologie quotient de la topologie des géodésiques par la relation R , $\tilde{\ell}_0^T$ appartient à l'image de g . Donc $B(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}')^T$ est contenu dans l'image de g . Supposons qu'il existe un élément x de l'image de g qui n'appartienne pas à $B(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}')^T$ et soit $\tilde{\ell}_x$ une feuille représentant x . Si $\tilde{\ell}_x$ était contenue dans l'intersection des adhérences des composantes connexes des complémentaires des images de $\tilde{\ell}$ et $\tilde{\ell}'$ qui contiennent respectivement $\tilde{\ell}'$ et $\tilde{\ell}$ (cas 1 ci-dessus), alors puisque g est continue, il existerait un élément de l'image de g dont un représentant serait entrelacé avec $\tilde{\ell}$ ou $\tilde{\ell}'$, ce qui est impossible car les feuilles de $\tilde{\Lambda}$ sont deux-à-deux non entrelacées. Donc $\tilde{\ell}_x$ est contenue dans

l'adhérence de la composante connexe du complémentaire de $\tilde{\ell}$ ne contenant pas $\tilde{\ell}'$ ou l'inverse (cas 2 et 3 ci-dessous). Mais puisque g est continue et comme $\tilde{\ell}$ sépare $\tilde{\ell}_x$ de $\tilde{\ell}'$ (ou $\tilde{\ell}'$ de $\tilde{\ell}$), il existerait alors $t \in]0, 1[$ tel que $\tilde{\ell}$ (ou $\tilde{\ell}'$) représente $g(t)$, et g ne serait pas injectif.



Donc si g est un arc entre $\tilde{\ell}$ et $\tilde{\ell}'$, il a la même image que \bar{f}^{-1} . L'unique arc (à reparamétrage près) entre $\tilde{\ell}^T$ et $\tilde{\ell}'^T$ est donc \bar{f}^{-1} qui est isométrique à $[0, d_T(\tilde{\ell}^T, \tilde{\ell}'^T)]$ par construction. Ceci étant vrai pour toutes les paires de feuilles, (T, d_T) est un arbre réel. \square

Supposons que la mesure $\nu_{\tilde{\mu}}$ associée à $(\tilde{\Lambda}, \tilde{\mu})$ ait un atome $\tilde{\ell}$. On remplace alors $\tilde{\ell}(\mathbb{R})$ par une bande plate de largeur $\nu_{\tilde{\mu}}(\tilde{\ell})$ en recollant isométriquement chacune des adhérences des composantes connexes du complémentaire de $\tilde{\ell}(\mathbb{R})$ dans $\tilde{\Sigma}$ sur les bords d'une copie, notée $BP(\tilde{\ell})$, de $\mathbb{R} \times [0, \nu_{\tilde{\mu}}(\tilde{\ell})]$ munie de la distance euclidienne. En procédant ainsi pour chacun des atomes de $\nu_{\tilde{\mu}}$, on obtient une surface munie d'une structure plate $(\tilde{\Sigma}', [\tilde{q}']')$ et l'action par isométries du groupe de revêtement $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ sur $\tilde{\Sigma}$ privé des images des atomes de $\nu_{\tilde{\mu}}$ se prolonge de manière unique en une action par isométries sur $(\tilde{\Sigma}', [\tilde{q}']')$.

Soient $\tilde{\ell}$ un atome de $\nu_{\tilde{\mu}}$, $F_{\tilde{\ell}}$ l'ensemble maximal des géodésiques de la bande plate $BP(\tilde{\ell})$ de $(\tilde{\Sigma}', [\tilde{q}']')$ correspondante qui sont parallèles à ses bords, et α un segment géodésique de $BP(\tilde{\ell})$ qui relie orthogonalement les bords de $BP(\tilde{\ell})$. Alors l'application $r : F_{\tilde{\ell}} \rightarrow \text{Image}(\alpha)$ définie par $r(g) = g(\mathbb{R}) \cap \text{Image}(\alpha)$ est un homéomorphisme. Donc on peut munir $F_{\tilde{\ell}}$ de la mesure $\nu_{\tilde{\ell}} = (r^{-1})_* dx_{\alpha}$, où dx_{α} est la mesure proportionnelle à la mesure de Lebesgue sur $\text{Image}(\alpha)$, de masse $\nu_{\tilde{\mu}}(\tilde{\ell})$. On définit alors la lamination plate mesurée $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ -invariante $(\tilde{\Lambda}', \tilde{\mu}')$ de $(\tilde{\Sigma}', [\tilde{q}']')$ en remplaçant les atomes $\tilde{\ell}$ de $\nu_{\tilde{\mu}}$ par les ensembles $F_{\tilde{\ell}}$ munis des mesures boréliennes $\nu_{\tilde{\ell}}$. L'application de $\tilde{\Lambda}'$ dans $\tilde{\Lambda}$ induite par le plongement isométrique canonique de chacune des composantes connexes du complémentaire, dans $\tilde{\Sigma}$, de $\bigcup_{\nu_{\tilde{\mu}}(\tilde{\ell}) > 0} BP(\tilde{\ell})$, dans $\tilde{\Sigma}'$, et telle que l'image de toutes les feuilles d'une bande plate $BP(\tilde{\ell})$ soit égale à $\tilde{\ell}$ (si $\tilde{\ell}$ est un atome de $\nu_{\tilde{\mu}}$), est continue, surjective et $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ -équivariante, et la mesure image de $\nu_{\tilde{\mu}'}$ par cette application est $\nu_{\tilde{\mu}}$. Alors $(\tilde{\Lambda}', \tilde{\mu}')$ n'a pas d'atome et on définit l'arbre dual à $(\tilde{\Lambda}, \tilde{\mu})$ comme étant l'arbre dual à $(\tilde{\Lambda}', \tilde{\mu}')$.

5.6 Action du groupe de revêtement sur l'arbre dual à une lamination plate mesurée.

Dans cette partie, on reprend les définitions et notations de la partie 5.5 et on définit l'action canonique du groupe de revêtement $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ sur l'arbre dual (T, d_T) à l'image réciproque $(\tilde{\Lambda}, \tilde{\mu})$ de la lamination plate mesurée (Λ, μ) dans $\tilde{\Sigma}$. On peut toujours supposer que $\nu_{\tilde{\mu}}$ n'a pas d'atome,

quitte à procéder comme au dernier paragraphe de la partie 5.5. Puisque $\tilde{\Lambda}$ est fixée, on notera $B(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}') = B_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}')$ pour toutes les feuilles $\tilde{\ell}, \tilde{\ell}'$ de $\tilde{\Lambda}$.

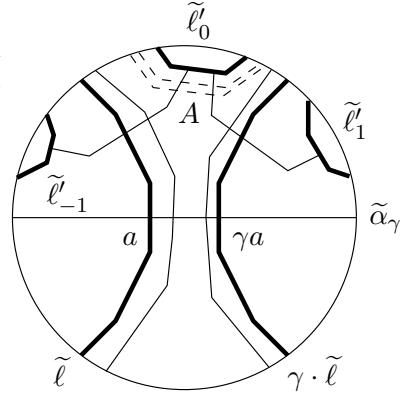
Le groupe de revêtement $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ agit sur $\tilde{\Sigma}$ par isométries, donc définit une action sur l'ensemble $[\mathcal{G}_{[\tilde{q}]}]$ des géodésiques de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ définies à changements d'origines près. Par $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ -invariance, cette action définit une action sur $\tilde{\Lambda}$, et comme pour tout $\gamma \in \Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ on a $\gamma_*\nu_{\tilde{\mu}} = \nu_{\tilde{\mu}}$ et $\gamma B(\tilde{\ell}, \tilde{\ell}') = B(\gamma\tilde{\ell}, \gamma\tilde{\ell}')$, pour toutes les feuilles $\tilde{\ell}$ et $\tilde{\ell}'$ de $\tilde{\Lambda}$, elle passe au quotient et définit une action par isométries de $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ sur l'arbre dual (T, d_T) à $(\tilde{\Lambda}, \tilde{\mu})$ défini au lemme 5.5.3.

Lemme 5.6.1 *Pour tout $\gamma \in \Gamma_{\tilde{\Sigma}} - \{e\}$, si $\tilde{\alpha}_{\gamma}$ est un axe de translation de γ dans $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ et α_{γ} est la projection de $[x, \gamma x]$, pour $x \in \tilde{\alpha}_{\gamma}(\mathbb{R})$, dans Σ , alors la distance de translation $\ell_T(\gamma)$ de γ dans (T, d_T) est égale à $i_{[\tilde{q}]}(\mu, \alpha_{\gamma})$. De plus, si $\ell_T(\gamma) > 0$, l'axe de translation de γ est l'image dans T de l'ensemble des feuilles de $\tilde{\Lambda}$ qui sont entrelacées avec $\tilde{\alpha}_{\gamma}$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer le lemme dans le cas où γ est primitif.

Cas (1). Supposons que $i_{[\tilde{q}]}(\mu, \alpha_{\gamma}) > 0$. Alors α_{γ} est entrelacée avec au moins une feuille de Λ . Soit $I = [a, \gamma a[$ un domaine fondamental de $\tilde{\alpha}_{\gamma}(\mathbb{R})$ pour l'action par translations de $\gamma^{\mathbb{Z}}$ tel que a appartienne à une feuille $\tilde{\ell}$ de $\tilde{\Lambda}$ entrelacée avec $\tilde{\alpha}_{\gamma}$. Alors l'ensemble F des feuilles de $\tilde{\Lambda}$ contenues dans l'intersection des adhérences de la composante connexe de $\tilde{\Sigma} - \tilde{\ell}(\mathbb{R})$ contenant $\gamma\tilde{\ell}$ et de la composante connexe de $\tilde{\Sigma} - \gamma\tilde{\ell}(\mathbb{R})$ contenant $\tilde{\ell}$, privé de $\gamma\tilde{\ell}$, est un domaine fondamental de $\tilde{\Lambda}$ pour l'action de $\gamma^{\mathbb{Z}}$. De plus, le sous-ensemble des feuilles de F qui sont entrelacées avec $\tilde{\alpha}_{\gamma}$ (et donc intersectent non trivialement $[a, \gamma a]$) est égal à $B(\tilde{\ell}, \gamma\tilde{\ell}) - \gamma\tilde{\ell}$, donc d'après le lemme 5.4.4 et comme $\nu_{\tilde{\mu}}(\{\gamma\tilde{\ell}\}) = 0$, on a $i_{[\tilde{q}]}(\alpha_{\gamma}, \mu) = \nu_{\tilde{\mu}}(B(\tilde{\ell}, \gamma\tilde{\ell})) = d(\tilde{\ell}, \gamma\tilde{\ell})$.

Comme F est un ensemble fondamental de $\tilde{\Lambda}$ pour l'action de $\gamma^{\mathbb{Z}}$, si $\tilde{\ell}'$ est une feuille de $\tilde{\Lambda}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\gamma^n \tilde{\ell}'$ appartienne à F . On note $\tilde{\ell}'_0 = \gamma^n \tilde{\ell}'$, $\tilde{\ell}'_1 = \gamma \tilde{\ell}'_0$ et $\tilde{\ell}'_{-1} = \gamma^{-1} \tilde{\ell}'_0$. Alors $\tilde{\ell}'_{-1}$ et $\tilde{\ell}'_1$ n'appartiennent pas à F . Comme les feuilles de $\tilde{\Lambda}$ sont deux-à-deux non entrelacées, les feuilles de $B(\tilde{\ell}, \gamma\tilde{\ell})$ appartiennent à $B(\tilde{\ell}'_{-1}, \tilde{\ell}'_0) \cup B(\tilde{\ell}'_0, \tilde{\ell}'_1)$, et $\gamma(B(\tilde{\ell}'_{-1}, \tilde{\ell}'_0) \cap B(\tilde{\ell}, \gamma\tilde{\ell}) - \tilde{\ell}) \subseteq B(\tilde{\ell}'_0, \tilde{\ell}'_1) - B(\tilde{\ell}'_0, \tilde{\ell}'_1) \cap B(\tilde{\ell}, \gamma\tilde{\ell})$, car F est un domaine fondamental de $\tilde{\Lambda}$ pour l'action de $\gamma^{\mathbb{Z}}$. Par $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ -invariance de $\nu_{\tilde{\mu}}$, on a



$$\begin{aligned}
\nu_{\tilde{\mu}}(B(\tilde{\ell}', \gamma\tilde{\ell}')) &= \nu_{\tilde{\mu}}(B(\tilde{\ell}'_0, \tilde{\ell}'_1)) \\
&\geq \nu_{\tilde{\mu}}((B(\tilde{\ell}, \gamma\tilde{\ell}) \cap B(\tilde{\ell}'_0, \tilde{\ell}'_1)) + \nu_{\tilde{\mu}}(\gamma(B(\tilde{\ell}, \gamma\tilde{\ell}) \cap B(\tilde{\ell}'_{-1}, \tilde{\ell}'_0))) \\
&= \nu_{\tilde{\mu}}((B(\tilde{\ell}, \gamma\tilde{\ell}) \cap B(\tilde{\ell}'_0, \tilde{\ell}'_1)) + \nu_{\tilde{\mu}}(B(\tilde{\ell}, \gamma\tilde{\ell}) \cap B(\tilde{\ell}'_{-1}, \tilde{\ell}'_0))) \\
&\geq \nu_{\tilde{\mu}}(B(\tilde{\ell}, \gamma\tilde{\ell})) \text{ car } B(\tilde{\ell}, \gamma\tilde{\ell}) \subseteq B(\tilde{\ell}'_{-1}, \tilde{\ell}'_0) \cup B(\tilde{\ell}'_0, \tilde{\ell}'_1) \\
&= d(\tilde{\ell}, \gamma\tilde{\ell})
\end{aligned}$$

Donc $\ell_T(\gamma) = d(\tilde{\ell}, \gamma\tilde{\ell}) = i_{[\tilde{q}]}(\mu, \alpha_{\gamma})$. En particulier, on a $\ell_T(\gamma) > 0$ et l'isométrie γ de (T, d_T) est hyperbolique, et donc admet un axe de translation. De plus, si $\tilde{\ell}'$ n'est pas entrelacée avec $\tilde{\alpha}_{\gamma}$, alors

Cas (2). Supposons que $i_{[q]}(\mu, \alpha_\gamma) = 0$, c'est-à-dire que $\tilde{\alpha}_\gamma$ n'est entrelacée avec aucune feuille de $\tilde{\Lambda}$. Si $\tilde{\alpha}_\gamma$ a le même couple de points à l'infini qu'une feuille $\tilde{\ell}$ de $\tilde{\Lambda}$, alors $\gamma\tilde{\ell} = \tilde{\ell}$ et $\tilde{\ell}^T$ est un point fixe de γ dans T . Sinon, on note $(S, N) = (\tilde{\alpha}_\gamma(-\infty), \tilde{\alpha}_\gamma(+\infty))$. D'après le lemme 5.1.2, aucune feuille de Λ n'est positivement périodique sans être périodique, donc d'après [Mor2, Lem. 4.13 et 4.14], les points N et S ne sont un point à l'infini d'aucune feuille de $\tilde{\Lambda}$. On rappelle que l'ordre cyclique total o sur $\partial_\infty \tilde{\Sigma}$ définit une relation d'ordre total \leq sur $\partial_\infty \tilde{\Sigma}$ défini par $S < \eta$ pour tout $\eta \in \partial_\infty \tilde{\Sigma} - \{S\}$ et $\eta_1 \leq \eta_2$ si et seulement si $o(\eta_1, \eta_2, S) \in \{0, 1\}$ pour tout $\eta_1, \eta_2 \in \partial_\infty \tilde{\Sigma} - \{S\}$ (voir [Mor2, Rem. 2.9] pour la définition de o et [Wol, Déf. 2.23] pour la définition de \leq). Soient ℓ une feuille de $\tilde{\Lambda}$ et $(a, b) = (\tilde{\ell}(-\infty), \tilde{\ell}(+\infty))$ son couple de points à l'infini. Puisque les feuilles de $\tilde{\Lambda}$ sont deux-à-deux non entrelacées, si $(a', b') \in \partial_\infty^2 \tilde{\Sigma}$ est le couple de points à l'infini d'une feuille $\tilde{\ell}'$, telle que $S \leq a' \leq a$ et $a \leq b' \leq N$, alors $b \leq b' \leq N$. Donc, par compacité de $\partial_\infty \tilde{\Sigma}$, quitte à remplacer $\tilde{\ell}$, on peut supposer qu'il n'existe pas de telle feuille $\tilde{\ell}'$ telles que $S < a' < a$ et $b < b' < N$. De même, si ℓ est contenue dans une bande plate, on peut toujours supposer qu'il n'existe pas de feuille contenue dans cette bande plate qui soit contenue dans l'intersection des adhérences des composantes connexes de $\tilde{\Sigma} - \tilde{\ell}(\mathbb{R})$ contenant $\tilde{\alpha}_\gamma$ et de $\tilde{\Sigma} - \tilde{\alpha}_\gamma(\mathbb{R})$ contenant $\tilde{\ell}$, hormis $\tilde{\ell}$. Or, l'action de γ sur $\partial_\infty \tilde{\Sigma}$ est une action de type Nord-Sud, dont les points fixes sont N et S , représentée par les flèches sur le dessin.

5.7 Liens entre l'arbre dual à une lamination plate mesurée et l'arbre dual à la lamination hyperbolique mesurée correspondante.

Dans cette partie, on reprend les notations et conventions de la partie 5.4. Nous commençons par rappeler la définition de l'arbre dual à une lamination hyperbolique mesurée (voir par exemple [MS4, §1]), avec une présentation nouvelle qui nous permettra de définir une isométrie $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ -équivariante entre l'arbre dual à une lamination plate mesurée et l'arbre dual à la lamination hyperbolique mesurée correspondante. Soit (Λ_m, μ_m) une lamination hyperbolique mesurée de (Σ, m) et $(\tilde{\Lambda}_m, \tilde{\mu}_m)$ son image réciproque dans $\tilde{\Sigma}$. Alors $(\tilde{\Lambda}_m, \tilde{\mu}_m)$ est $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ -invariante et elle définit une mesure $\nu_{\tilde{\mu}_m} \in \mathcal{M}_{\Gamma_{\tilde{\Sigma}}}(\mathcal{G}_{\tilde{m}})$ (voir [Bon3, Prop. 17 p. 154]). Si $\tilde{\lambda}$ est un atome de $\nu_{\tilde{\mu}_m}$, on remplace $\tilde{\lambda}$ par une bande plate de largeur $\nu_{\tilde{\mu}_m}(\tilde{\lambda})$ feuilletée par des droites parallèles aux bords. En procédant ainsi pour chacun des atomes de $\nu_{\tilde{\mu}_m}$, on obtient une lamination géodésique $\tilde{\Lambda}'$ sur une surface munie d'une métrique $(\tilde{\Sigma}', d')$, qui est CAT(0) et localement CAT(-1) dans le complémentaire des bandes plates, et l'action par isométries de $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ sur $(\tilde{\Sigma}, \tilde{m})$ se prolonge de manière unique en une action par isométries sur $(\tilde{\Sigma}', d')$. Remarquons que l'espace $(\tilde{\Sigma}', d')$ est un espace métrique CAT(0) enrubanné, et on est dans le cadre de la généralisation des laminations géodésiques proposée dans [Mor2].

De plus, pour chaque bande plate $\text{BP}(\tilde{\lambda})$ associée à un atome $\tilde{\lambda}$ de $\nu_{\tilde{\mu}_m}$, si $\alpha : [0, \nu_{\tilde{\mu}_m}(\tilde{\lambda})] \rightarrow \text{BP}(\tilde{\lambda})$ est un segment qui relie orthogonalement les deux bords de $\text{BP}(\tilde{\lambda})$, alors l'application r_α de l'ensemble des feuilles de $\tilde{\Lambda}'$ contenues dans $\text{BP}(\tilde{\lambda})$ dans $\text{Image}(\alpha)$ définie par $r(g) = g(\mathbb{R}) \cap \text{Image}(\alpha)$ est un homéomorphisme. Donc on peut munir l'ensemble des feuilles contenues dans $\text{BP}(\tilde{\lambda})$ de la mesure $\nu_{\tilde{\lambda}} = (r_\alpha^{-1})_* dx_\alpha$ où dx_α est la mesure proportionnelle à la mesure de Lebesgue sur $\text{Image}(\alpha)$, de masse $\nu_{\tilde{\mu}_m}(\tilde{\lambda})$. La mesure ν' égale à $\nu_{\tilde{\mu}_m}$ en dehors des atomes et égale à $\nu_{\tilde{\lambda}}$ sur l'ensemble des feuilles feuilletant la bande plate associée à $\tilde{\lambda}$, pour chaque atome $\tilde{\lambda}$ de $\nu_{\tilde{\mu}_m}$, est une mesure de Radon sur $\mathcal{G}_{d'}$ qui est $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ -invariante, sans atome et de support égal à $\tilde{\Lambda}'$.

Si $\tilde{\lambda}_0$ et $\tilde{\lambda}_1$ sont des feuilles de $\tilde{\Lambda}'$, et si c est un segment géodésique joignant leurs images, on note $B_{\tilde{\Lambda}'}(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1)$ (ou plus rapidement $B(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1)$) l'ensemble compact des feuilles de $\tilde{\Lambda}'$ qui sont contenues dans l'intersection des adhérences des composantes connexes des complémentaires de $\tilde{\lambda}_0(\mathbb{R})$ et $\tilde{\lambda}_1(\mathbb{R})$ qui contiennent respectivement $\tilde{\lambda}_1$ et $\tilde{\lambda}_0$, et qui intersectent c non trivialement. Alors de même que dans la partie 5.5, l'ensemble $B_{\tilde{\Lambda}'}(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1)$ ne dépend pas du choix de c , il est compact et muni d'un ordre total, que l'on note toujours \preceq , défini par $\tilde{\lambda} \preceq \tilde{\lambda}'$ si et seulement si $\tilde{\lambda} \in B(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}')$. On définit aussi une pseudo-distance $\tilde{d}_{\tilde{\Lambda}'}$ sur $\tilde{\Lambda}'$ par $\tilde{d}_{\tilde{\Lambda}'}(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1) = \nu_{\tilde{\mu}_m}(B_{\tilde{\Lambda}'}(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1))$ pour toutes les feuilles $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1$ de $\tilde{\Lambda}'$, et le quotient de $(\tilde{\Lambda}', \tilde{d}_{\tilde{\Lambda}'})$ par la relation d'équivalence $\tilde{\lambda}_0 \sim \tilde{\lambda}_1$ si et seulement si $\tilde{d}_{\tilde{\Lambda}'}(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1) = 0$ (ou de manière équivalente, $B(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1) = \{\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1\}$) est un arbre réel (T, d_T) que l'on appelle *l'arbre dual* à $(\tilde{\Lambda}_m, \tilde{\mu}_m)$. Pour tout $\gamma \in \Gamma_{\tilde{\Sigma}}$, $\gamma_* \nu' = \nu'$ et $\gamma B(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1) = B(\gamma \tilde{\lambda}_0, \gamma \tilde{\lambda}_1)$ pour toutes les feuilles $\tilde{\lambda}_0$ et $\tilde{\lambda}_1$ de $\tilde{\Lambda}'$, donc l'action de $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ sur $\tilde{\Lambda}_m$ passe au quotient et définit une action par isométries sur (T, d_T) . On se convainc aisément qu'il existe une isométrie $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ -équivariante entre l'arbre dual ainsi construit, et celui construit par exemple dans [MS4, §1], en identifiant les feuilles de $\tilde{\Lambda}'$ et les composantes connexes du complémentaire du support de $\tilde{\Lambda}'$ qu'elles bordent.

Soient $(\tilde{\Lambda}_{[q]}, \tilde{\mu}_{[q]})$ une lamination plate mesurée de $(\tilde{\Sigma}, [q])$, $\nu_{\tilde{\mu}_{[q]}}$ la mesure qu'elle définit sur $\mathcal{G}_{[q]}$ et $\nu_{\tilde{\mu}_m}$ son image par φ_* (voir le lemme 5.4.1). On note $(\tilde{\Lambda}_m, \tilde{\mu}_m)$ la lamination hyperbolique mesurée définie par $\nu_{\tilde{\mu}_m}$, et $\tilde{\Lambda}'$ et ν' les lamination géodésique sur $(\tilde{\Sigma}', d')$ et mesure de Radon sur $\mathcal{G}_{d'}$ associées à $(\tilde{\Lambda}_m, \tilde{\mu}_m)$ par la construction ci-dessus. On suppose (quitte à procéder comme dans

le dernier paragraphe de la partie 5.5) que $\nu_{\tilde{\mu}_{[q]}}$ n'a pas d'atome.

Si $\tilde{\lambda}$ est un atome de $\nu_{\tilde{\mu}_m}$, et si $F_{\tilde{\lambda}}^-$ est l'ensemble des feuilles de $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$ auxquelles correspond $\tilde{\lambda}$ (voir [Mor2, §4.2]), il existe des bandes plates maximales de $(\tilde{\Sigma}, [\tilde{q}])$ et de $(\tilde{\Sigma}', d')$ qui contiennent respectivement $F_{\tilde{\lambda}}^-$ et l'ensemble $F_{\tilde{\lambda}}'^-$ des feuilles de $\tilde{\Lambda}'$ qui correspondent à $\tilde{\lambda}$ dans la construction ci-dessus. On note $\tilde{\ell}_0$ et $\tilde{\ell}_1$ (resp. $\tilde{\lambda}_0$ et $\tilde{\lambda}_1$) les feuilles extrémales de $F_{\tilde{\lambda}}^-$ (resp. $F_{\tilde{\lambda}}'^-$), c'est-à-dire telles que $F_{\tilde{\lambda}}^- = B_{\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}}(\tilde{\ell}_0, \tilde{\ell}_1)$ et $F_{\tilde{\lambda}}'^- = B_{\tilde{\Lambda}'}(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1)$. Alors il existe une unique application $\phi_{\tilde{\lambda}} : F_{\tilde{\lambda}}^- \rightarrow F_{\tilde{\lambda}}'^-$ telle que pour toute $\tilde{\ell} \in F_{\tilde{\lambda}}^-$, on ait $\nu_{\tilde{\mu}_m}(B_{\tilde{\Lambda}'}(\phi_{\tilde{\lambda}}(\tilde{\ell}_0), \phi_{\tilde{\lambda}}(\tilde{\ell}))) = \nu_{\tilde{\mu}_{[q]}}(B_{\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}}(\tilde{\ell}_0, \tilde{\ell}))$. On note alors ϕ l'application de $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$ dans $\tilde{\Lambda}'$ égale à $\varphi|_{\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}}$ en dehors des images réciproques des atomes de $\nu_{\tilde{\mu}_m}$ (voir [Mor2, §4.2]) et à $\phi_{\tilde{\lambda}}$ sur les ensembles $F_{\tilde{\lambda}}^-$ où $\tilde{\lambda}$ est un atome de $\nu_{\tilde{\mu}_m}$. Alors par construction, pour toutes les feuilles $\tilde{\ell}_0$ et $\tilde{\ell}_1$ de $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$, on a $B_{\tilde{\Lambda}'}(\phi(\tilde{\ell}_0), \phi(\tilde{\ell}_1)) = \phi(B_{\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}}(\tilde{\ell}_0, \tilde{\ell}_1))$. Donc l'application ϕ passe au quotient et définit une application $\phi_T : (T_{[q]}, d_{T_{[q]}}) \rightarrow (T_m, d_{T_m})$, où $(T_{[q]}, d_{T_{[q]}})$ et (T_m, d_{T_m}) sont respectivement les arbres duaux à $(\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}, \tilde{\mu}_{[q]})$ et à $(\tilde{\Lambda}_{\tilde{m}}, \tilde{\mu}_m)$.

Lemme 5.7.1 *L'application $\phi_T : (T_{[q]}, d_{T_{[q]}}) \rightarrow (T_m, d_{T_m})$ est une isométrie $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ -équivariante.*

Démonstration. Si $\tilde{\ell}_0$ et $\tilde{\ell}_1$ sont des feuilles de $\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}$, on a $\phi(B_{\tilde{\Lambda}_{[\tilde{q}]}}(\tilde{\ell}_0, \tilde{\ell}_1)) = B_{\tilde{\Lambda}'}(\phi(\tilde{\ell}_0), \phi(\tilde{\ell}_1))$ et comme $\nu_{\tilde{\mu}_m} = \varphi_* \nu_{\tilde{\mu}_{[q]}}$, l'application ϕ_T est isométrique. De plus, ϕ est surjective donc, par passage au quotient, ϕ_T aussi et c'est une isométrie. Enfin, comme φ , l'application ϕ est $\Gamma_{\tilde{\Sigma}}$ -équivariante et par passage au quotient, ϕ_T aussi. \square

Bibliographie

- [ABEM] A. Athreya, A. Bufetov, A. Eskin, and M. Mirzakhani. *Lattice point asymptotics and volume growth on Teichmüller space*. prepublication 2006 [ArXiv math.DS/0610715](#), à paraître dans *Duke Mathematical Journal*.
- [Abi] W. Abikoff. *Real analytic theory of Teichmüller space*. Lect. Notes in Math. **820**, Springer Verlag, 1980.
- [AGY] A. Avila, S. Gouëzel, and J.-C. Yoccoz. *Exponential mixing for the Teichmüller flow*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **104** (2006) 143–211.
- [BFH] M. Bestvina, M. Feighn, and M. Handel. *Laminations, trees and irreducible automorphisms of free groups*. Geom. Funct. Anal. **7** (1997) 215–244 ; erratum **7** (1997) 1143–1143.
- [BH] M. R. Bridson and A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*. Grundlehren der Math. Wiss. **319**, Springer Verlag, 1999.
- [Bon1] F. Bonahon. *Geodesic currents on negatively curved groups*. In “Arboreal group theory”, R. Alperin ed., pp. 143–168, Pub. M.S.R.I. **19**, Springer Verlag 1991.
- [Bon2] F. Bonahon. *Geodesic laminations on surfaces*. In "Laminations and foliations in dynamics, geometry and topology" (Stony Brook, 1998) *Contemp. Math.* **269** Amer. Math. Soc. (2001).
- [Bon3] F. Bonahon. *The geometry of Teichmüller space via geodesic currents*. *Invent. Math.* **92** (1988) 139–162.
- [Bou] N. Bourbaki. *Topologie générale*. Chap. 1 à 4, Hermann, 1971.
- [CEM] R. Canary, D. Epstein, and A. Marden. *Fundamentals of Hyperbolic Manifolds : Selected Exposition*. London Math. Soc. Lect. Series **328**, 2005.
- [CFF] C. Croke, A. Fathi, and J. Feldman. *The marked length-spectrum of a surface of nonpositive curvature*. *Topology*, **31** (4) 847–855, 1992.
- [CHL] T. Coulbois, A. Hilion, and M. Lustig. *Non-unique ergodicity, observers’ topology and the dual lamination for \mathbb{R} -trees*. *Illinois J. Math.* **51** (2007) 897–911.
- [Cro] C. Croke. *Rigidity for surfaces of nonpositive curvature*. *Comment. Math. Helv.*, **65** (1) 150–169, 1990.
- [Dan] K. Dankwart. *On the large-scale geometry of flat surfaces*. Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades (Bonn, 010).
- [DH] A. Douady and J. Hubbard. *On the density of Strebel Differentials*. *Invent. math.* **30** 175–179, 1975.

- [DLR] M. Duchin, C. Leininger, and K. Rafi. *Length spectra and degeneration of flat metrics*. Invent. Math. **18** (2010) 231–277.
- [Dru] C. Druţu. *Cônes asymptotiques et invariants de quasi-isométrie pour des espaces métriques hyperboliques*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **51** (2001) 81–97.
- [DS] C. Druţu and M. Sapir. *Tree-graded spaces and asymptotic cones of groups*. Topology **44** (2005) 959–1058.
- [Dug] J. Dugundji. *Topology*. Wm. C. Brown (1989).
- [Dum] D. Dumas. *Complex projective structures*. In “Handbook of Teichmüller Theory Vol. II”, A. Papadopoulos ed., pp. 455–508, Euro. Math. Soc. 2009.
- [EKZ] E. Eskin, M. Kontsevich, and A. Zorich. *Sum of Lyapunov exponents of the Hodge bundle with respect to the Teichmüller geodesic flow*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **120**, 2014 .
- [ERS] A. Eskin, Z. Rudnick, and P. Sarnak. *A proof of Siegel’s weight formula*. Internat. Math. Res. Notices **5** (1991) 65–69.
- [FK] R. H. Fox and B. Kershner. *Geodesics on a rational polyhedron*. Duke. Math. J. **2**, 147–150 (1936).
- [FLP] A. Fathi, F. Laudenbach, and V. Poenaru. *Travaux de Thurston sur les surfaces*. Astérisque **66-67**, Soc. Math. France 1979.
- [Gar] F. Gardiner. *Teichmüller theory and quadratic differentials*. Wiley, 1987.
- [Gol] W. M. Goldman. *Geometric structures on manifolds and varieties of representations*. Geometry of group representations (Boulder, 1987), Contemp. Math. **74**, Amer. Math. Soc. (1988) 169–198.
- [Ham] U. Hamenstädt. *Geometry of the mapping class groups I : Boundary amenability*. Invent. Math. **175** (2009) 545–609.
- [HM] J. H. Hubbard and H. Masur. *Quadratic differentials and foliations*. Matrix Editions, 2006.
- [HMU] P. Hubert, L. Marchese, and C. Ulcigrai. *Lagrange spectra in Teichmüller dynamics via renormalization*. Funct. Anal. **25** (2015) 180–255.
- [Lan] E. Lanneau. *Connected components of the strata of the moduli spaces of quadratic differentials*. Ann. Sci. de l’ENS **41** 2008.
- [Lec] C. Lecuire. *Modèles et laminations terminales [d’après Minsky et Brock-Canary-Minsky]*. Sémin. Bourbaki **1068** (2013) 280–350.
- [Lev] G. Levitt. *Foliations and laminations on hyperbolic surfaces*. Topology **114** (2004) 119–135.
- [Mas1] H. Masur. *Ergodic theory of translation surfaces*. In Handbook of dynamical systems, Vol. 1B, B. Hasselblatt, A. Katok eds, Elsevier, 2005.
- [Mas2] H. Masur. *Interval exchange transformations and measured foliations*. Ann. of Math. **141** 169–200, 1982.
- [Min] Y. N. Minsky. *Harmonic maps, length, and energy in Teichmüller space*. J. Diff. Geom. **35** (1992) 151–217.

- [Mor1] T. Morzadec. *Geometric compactification of the modular space of half-translation structures on a surface*. En préparation.
- [Mor2] T. Morzadec. *Laminations géodésiques plates*. À paraître dans Ann. Institut Fourier (Grenoble) arXiv :1311.7586.
- [Mor3] T. Morzadec. *Laminations géodésiques plates mesurées*. arXiv :1311.7609.
- [Mor4] T. Morzadec. *Measured geodesic laminations in Flatland*. arXiv :1501.04057.
- [MS1] A. Marden and K. Strebel. *On the ends of trajectories*. Differential geometry and complex analysis, Springer Verlag (1985) 195–204.
- [MS2] H. Masur and J. Smillie. *Hausdorff dimension of sets of nonergodic measured foliations*. Ann. of Math. **134** 455–543, 1991.
- [MS3] H. Masur and J. Smillie. *Quadratic differential with prescribed singularities and pseudo-Anosov diffeomorphisms*. Comment. Math. Helv. **68** (1993) 461–488.
- [MS4] J. Morgan and P. Shalen. *Free actions of surface groups on \mathbb{R} -trees*. Topology **30** (1991) 143–154.
- [Ota] J.-P. Otal. *Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative*. Ann. Math. **131** (1990) 151–162.
- [Paul1] F. Paulin. *Sur la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller*. dans "Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités", L. Bessières, A. Parreau, B. Remy eds (Actes de l'école d'été de l'Institut Fourier, Grenoble, 2004), Sémi. Congrès **18**, 421–443, Soc. Math. France, 2009.
- [Pau2] F. Paulin. *The Gromov topology on \mathbb{R} -trees*. Topology Appl. **32** (1989) 197–221.
- [Pau3] F. Paulin. *Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels*. Invent. Math. **94** (1988) 53–80.
- [Pen] R. C. Penner. *Combinatorics of train tracks*. Annals of Math. Stud. Princeton Univ. Press, 1992.
- [Raf] K. Rafi. *A characterization of short curves of a Teichmüller geodesic*. Geom. and Topo. **9** (2005) 179–202.
- [Ser] J.-P. Serre. *Arbres, amalgames, SL_2* . 3ème éd. corr., Astérisque **46**, Soc. Math. France, 1983.
- [Sha] P. Shalen. *Dendrology of groups : an introduction*. In "Essays in group theory", pp. 265–319, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **8**, Springer Verlag, 1987.
- [Sko] R. Skora. *Splittings of surfaces*. J. Amer. Math. Soc. **9** (1996) 605–616.
- [Str] K. Strebel. *Quadratic Differentials*. Springer Verlag, 1984.
- [Vee1] W. Veech. *Dynamics over Teichmüller space*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S) **14**, 103–106, 1986.
- [Vee2] W. Veech. *Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps*. Ann. of Math. (2) **115**, 201–242, 1982.
- [Wol] M. Wolf. *Connected components of the compactification of representation spaces of surface groups*. Geom. and Topo. **15** (2011) 1225–1295.
- [Wri] A. Wright. *Translation surfaces and their orbit closures : an introduction for a broad audience*. Geom. and Topo. **15** (2011) 1225–1295.

- [Zor] A. Zorich. *Flat surfaces*. In “Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry. Vol. 1 : On random matrices, zeta functions and dynamical systems”, P. Cartier, B. Julia, P. Moussa, P. Vanhove eds, pp. 439–586, Springer-Verlag, 2006.

Département de mathématique, UMR 8628 CNRS, Université Paris-Sud, Bât. 430, F-91405 Orsay Cedex, FRANCE. Bureau : 16.

thomas.morzadec@math.u-psud.fr